-- % Some elementary definitions: ordered pair and component extraction

-- Ordered pair

1 ⇛ $\langle X,Y\rangle =_{\mathrm{Def}} \{\{X\},\{\{X\},\{\{Y\},Y\}\}\}$

1 ⊢ $\mathbf{arb}(\{X\})=X$

1a ⊢ $\mathbf{arb}(\{\{X\},X\})=X$

2 ⊢ $\mathbf{arb}(\langle X,Y\rangle)=\{X\}$

3 ⊢ $\mathbf{arb}(\mathbf{arb}(\langle X,Y\rangle))=X$

4 ⊢ $\mathbf{arb}(\mathbf{arb}(\mathbf{arb}(\langle X,Y\rangle\backslash\{\mathbf{arb}(\langle X,Y\rangle)\})\backslash\{\mathbf{arb}(\langle X,Y\rangle)\}))=Y$

2 ⇛ $\mathsf{car}(P) =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\mathbf{arb}(P))$

3 ⇛ $\mathsf{cdr}(P) =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\mathbf{arb}(\mathbf{arb}(P\backslash\{\mathbf{arb}(P)\})\backslash\{\mathbf{arb}(P)\}))$

5 ⊢ $\mathsf{car}(\langle X,Y\rangle)=X$

6 ⊢ $\mathsf{cdr}(\langle X,Y\rangle)=Y$

-- Ordered pair Property

7 ⊢ $\langle X,Y\rangle=\langle\mathsf{car}(\langle X,Y\rangle),\mathsf{cdr}(\langle X,Y\rangle)\rangle$

-- % Some utility theorems giving elementary properties of setformers

THEORY setformer(e, ep1, s, p, pp1)

-- Elementary properties of setformers

$[\forall x \in s \mid e(x)=ep1(x)]$ & $[\forall x \in s \mid p(x) \leftrightarrow pp1(x)]$

⟹

⊢ $\{e(x) : x \in s \mid p(x)\}=\{ep1(x) : x \in s \mid pp1(x)\}$

END setformer

THEORY setformer0(e, s, p)

-- Elementary properties of setformers

⟹

⊢ $s\neq\emptyset \rightarrow \{e(x) : x \in s\}\neq\emptyset$

⊢ $\{x \in s \mid P(x)\}\neq\emptyset \rightarrow \{e(x) : x \in s \mid P(x)\}\neq\emptyset$

END setformer0

THEORY setformer2(e, ep2, f, fp, s, p, pp2)

-- More elementary properties of setformers

$[\forall x \in s \mid f(x)=fp(x)]$ & $[\forall x \in s, \forall y \in f(x) \mid e(x,y)=ep2(x,y)]$ & $[\forall x \in s, \forall y \in f(x) \mid p(x,y) \leftrightarrow pp2(x,y)]$

⟹

⊢ $\{e(x,y) : x \in s,\ y \in f(x) \mid p(x,y)\}=\{ep2(x,y) : x \in s,\ y \in fp(x) \mid pp2(x,y)\}$

END setformer2

-- % A first version of the principle of transfinite induction

THEORY transfinite_induction(n, P)

$P(n)$

⟹ (m)

transfinite_induction · 1 ⊢ $\neg[\forall m \mid P(m) \rightarrow [\exists k \in m \mid P(k)]]$

transfinite_induction · 2 ⊢ $P(m)$ & $[\forall k \in m \mid \neg P(k)]$

END transfinite_induction

-- % Some elementary set-theoretic definitions: maps, domain, range, etc.

4 $\Rightarrow$ $\mathsf{is\_map}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} X = \{\langle \mathsf{car}(x), \mathsf{cdr}(x)\rangle : x \in X\}$

5 $\Rightarrow$ $\mathbf{domain}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{car}(x) : x \in X\}$

6 $\Rightarrow$ $\mathbf{range}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{cdr}(x) : x \in X\}$

7 $\Rightarrow$ $\mathsf{Svm}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_map}(X) \;\&\; [\forall x \in X, \forall y \in X \mid \mathsf{car}(x) = \mathsf{car}(y) \rightarrow x = y]$

8 $\Rightarrow$ $1\text{–}1(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{Svm}(X) \;\&\; [\forall x \in X, \forall y \in X \mid \mathsf{cdr}(x) = \mathsf{cdr}(y) \rightarrow x = y]$

-- % The enumeration of a set

9 $\Rightarrow$ $\mathsf{enum}(X, Y) =_{\mathrm{Def}}$ **if** $Y \subseteq \{\mathsf{enum}(y, Y) : y \in X\}$ **then** Y **else arb** $(Y \setminus \{\mathsf{enum}(y, Y) : y \in X\})$ **fi**

-- % Ordinals and their properties

10 $\Rightarrow$ $\mathsf{Ord}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} [\forall x \in X \mid x \subseteq X] \;\&\; [\forall x \in X, \forall y \in X \mid x \in y \vee y \in x \vee x = y]$

-- Successor operation

11 $\Rightarrow$ $\mathsf{next}(X) =_{\mathrm{Def}} X \cup \{X\}$

8 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; \mathsf{Ord}(T) \;\&\; T \subseteq S \rightarrow T = S \vee T = \mathbf{arb}\,(S \setminus T)$

9 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; \mathsf{Ord}(T) \rightarrow \mathsf{Ord}(S \cap T)$

10 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; \mathsf{Ord}(T) \rightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$

11 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; \mathsf{Ord}(T) \rightarrow S \in T \vee T \in S \vee S = T$

12 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; T \in S \rightarrow \mathsf{Ord}(T)$

-- The class of all sets is not a set

13 $\vdash$ $\neg[\exists x, \forall y \mid y \in x]$

-- The class of ordinals is not a set

14 $\vdash$ $\neg[\exists \mathsf{ordinals}, \forall x \mid x \in \mathsf{ordinals} \leftrightarrow \mathsf{Ord}(x)]$

15 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \rightarrow \mathsf{Ord}(\mathsf{next}(S))$

16 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \;\&\; \mathsf{Ord}(T) \rightarrow (T \subseteq S \leftrightarrow T \in S \vee T = S)$

17 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(X) \;\&\; S \in \{\mathsf{enum}(y, S) : y \in X\} \rightarrow S \subseteq \{\mathsf{enum}(y, S) : y \in X\}$

18 $\vdash$ $\mathsf{enum}(X, S) = S \vee \mathsf{enum}(X, S) \in S$

19 $\vdash$ $\mathsf{enum}(X, S) = S \;\&\; Y \supseteq X \rightarrow \mathsf{enum}(Y, S) = S$

-- The enumeration of a set is 1-1

20 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(X) \;\&\; \mathsf{Ord}(W) \;\&\; X \neq W \rightarrow S \in \{\mathsf{enum}(y, S) : y \in X\}$
$\vee\; S \in \{\mathsf{enum}(y, S) : y \in W\} \vee \mathsf{enum}(X, S) \neq \mathsf{enum}(W, S)$

-- Enumeration Lemma

21 $\vdash$ $[\forall s, \exists x \mid \mathsf{Ord}(x) \;\&\; s \in \{\mathsf{enum}(y, s) : y \in x\}]$

-- Enumeration theorem

22 $\vdash$ $[\forall s, \exists x \mid (\mathsf{Ord}(x) \;\&\; s = \{\mathsf{enum}(y, s) : y \in x\}) \;\&\; [\forall y \in x, \forall z \in x \mid y \neq z \rightarrow \mathsf{enum}(y, s) \neq \mathsf{enum}(z, s)]]$

-- % More elementary set-theoretic definitions: map restrictions, values, inverse map, etc.

-- Map Restriction

12 $\Rightarrow$ $X_{|Y} =_{\mathrm{Def}} \{p \in X \mid \mathsf{car}(p) \in Y\}$

-- Value of single-valued function

13 $\Rightarrow$ $X \upharpoonright Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X_{|\{Y\}}))$

-- Map Product

14 $\Rightarrow$ $X \circ Y =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{car}(x), \mathsf{cdr}(y)\rangle : x \in Y, y \in X \mid \mathsf{cdr}(x) = \mathsf{car}(y)\}$

-- Inverse Map

14*a* $\Rightarrow$ $X^{-1} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{cdr}(x), \mathsf{car}(x)\rangle : x \in X\}$

-- Identity Map

14*b* $\Rightarrow$ $\iota_X =_{\mathrm{Def}} \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$

-- % The cardinality of a set

$14c \Rrightarrow \mathsf{Ord}(\mathsf{enum\_Ord}(s))\ \&\ s=\{\mathsf{enum}(y,s) : y \in \mathsf{enum\_Ord}(s)\}$
$\quad \&\ [\forall y \in \mathsf{enum\_Ord}(s), \forall z \in \mathsf{enum\_Ord}(s) \mid y \neq z \rightarrow \mathsf{enum}(y,s) \neq \mathsf{enum}(z,s)]$

-- Cardinality

$15 \quad \Rrightarrow \quad \#X =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\{x : x \in \mathsf{next}(\mathsf{enum\_Ord}(X)) \mid [\exists f \mid 1\text{–}1(f)\ \&\ \mathbf{domain}(f)=x\ \&\ \mathbf{range}(f)=X]\})$

-- Cardinal

$16 \quad \Rrightarrow \quad \mathsf{Card}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{Ord}(X)\ \&\ [\forall y \in X, \forall f \mid \neg\mathbf{domain}(f)=y \vee \neg\mathbf{range}(f)=X \vee \neg\mathsf{Svm}(f)]$

-- % Elementary properties of maps, map restrictions, map values, etc.

23 $\vdash F_{|A} \subseteq F$
24 $\vdash S \cap T=\{x \in S \mid x \in T\}$
25 $\vdash S \setminus T=\{x \in S \mid x \notin T\}$
26 $\vdash \mathsf{is\_map}(F) \leftrightarrow [\forall x \in F \mid x=\langle \mathsf{car}(x), \mathsf{cdr}(x)\rangle]$
27 $\vdash G \subseteq F\ \&\ \mathsf{is\_map}(F) \rightarrow \mathsf{is\_map}(G)$
28 $\vdash G \subseteq F\ \&\ \mathsf{Svm}(F) \rightarrow \mathsf{Svm}(G)$
29 $\vdash G \subseteq F\ \&\ 1\text{–}1(F) \rightarrow 1\text{–}1(G)$
30 $\vdash X \in F \rightarrow \mathsf{car}(X) \in \mathbf{domain}(F)$
31 $\vdash X \in F \rightarrow \mathsf{cdr}(X) \in \mathbf{range}(F)$
32 $\vdash A \cap B=\{x \in A \mid x \in B\}$
33 $\vdash \mathsf{is\_map}(F)\ \&\ \mathsf{is\_map}(G) \rightarrow \mathsf{is\_map}(F \cup G)$
34 $\vdash F_{|A \cup B}=F_{|A} \cup F_{|B}$

-- Associativity of map multiplication

35 $\vdash F \circ (G \circ H)=(F \circ G) \circ H$
36 $\vdash (F \cup G)_{|A}=F_{|A} \cup G_{|A}$
37 $\vdash F_{|\mathbf{domain}(F)}=F$
38 $\vdash X \in \mathbf{domain}(F) \rightarrow F \restriction X \in \mathbf{range}(F)$
39 $\vdash \mathsf{Svm}(F) \leftrightarrow F=\{\langle x, F \restriction x\rangle : x \in \mathbf{domain}(F)\}$
$39a$ $\vdash \mathsf{Svm}(F) \rightarrow F=\{\langle x, F \restriction x\rangle : x \in \mathbf{domain}(F)\}\ \&\ \mathbf{range}(F)=\{F \restriction x : x \in \mathbf{domain}(F)\}$

-- % Two elementary theories embodying some elementary lemmas about single-valued functions and maps

THEORY fcn_symbol(f, s)
$\Longrightarrow$ (g)
$\vdash g=\{\langle x, f(x)\rangle : x \in s\}$
fcn_symbol · 1 $\vdash \mathbf{domain}(g)=s$
fcn_symbol · 2 $\vdash [\forall x \in s \mid g \restriction x=f(x)]$
fcn_symbol · 3 $\vdash X \notin s \rightarrow g \restriction X=\emptyset$
fcn_symbol · 4 $\vdash \mathsf{Svm}(g)$
fcn_symbol · 5 $\vdash \mathbf{range}(g)=\{f(x) : x \in s\}$
fcn_symbol · 6 $\vdash [\forall x \in s, \forall y \in s \mid f(x)=f(y) \rightarrow x=y] \rightarrow 1\text{–}1(g)$
$--$ $\vdash \#\{\langle x, f(x)\rangle : x \in s\}=\#s\ \&\ \#\{f(x) : x \in s\} \subseteq \#s$
END fcn_symbol
40 $\vdash U=\langle A, B\rangle \rightarrow U=\langle \mathsf{car}(U), \mathsf{cdr}(U)\rangle$
41 $\vdash \mathsf{is\_map}(F)\ \&\ U \in F \rightarrow U=\langle \mathsf{car}(U), \mathsf{cdr}(U)\rangle$
THEORY iz_map(f, a, b, s)
$f=\{\langle a(x), b(x)\rangle : x \in s\}$
$\Longrightarrow$
iz_map · 1 $\vdash \mathsf{is\_map}(f)$
END iz_map

-- % More elementary set-theoretic theorems for maps, domains and ranges, 1-1 maps, etc.

42 $\vdash$ $\mathbf{domain}\,(F \cup G) = \mathbf{domain}(F) \cup \mathbf{domain}(G)$

43 $\vdash$ $\mathbf{range}\,(F \cup G) = \mathbf{range}(F) \cup \mathbf{range}(G)$

44 $\vdash$ $\mathbf{domain}(F) = \emptyset \leftrightarrow \mathbf{range}(F) = \emptyset$

45 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ X \in F \rightarrow F \restriction \mathsf{car}(X) = \mathsf{cdr}(X)$

-- Union of single_valued maps

46 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ \mathbf{domain}(F) \cap \mathbf{domain}(G) = \emptyset \rightarrow \mathsf{Svm}(F \cup G)$

47 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F) \rightarrow \mathsf{is\_map}(F_{|S})$

48 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \mathsf{Svm}(F_{|S})$

49 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F_{|S})$

50 $\vdash$ $\mathbf{range}(F_{|S}) \subseteq \mathbf{range}(F)$

50*a* $\vdash$ $\mathbf{domain}(F_{|S}) = \mathbf{domain}(F) \cap S$

51 $\vdash$ $\mathbf{range}(G) \subseteq \mathbf{domain}(F) \rightarrow \mathbf{range}\,(F \circ G) = \mathbf{range}(F_{|\mathbf{range}(G)})\ \&\ \mathbf{domain}\,(F \circ G) = \mathbf{domain}(G)$

51*a* $\vdash$ $\mathbf{range}(G) = \mathbf{domain}(F) \rightarrow \mathbf{range}\,(F \circ G) = \mathbf{range}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F \circ G) = \mathbf{domain}(G)$

-- Union of 1-1 maps

52 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(G)\ \&\ \mathbf{range}(F) \cap \mathbf{range}(G) = \emptyset\ \&\ \mathbf{domain}(F) \cap \mathbf{domain}(G) = \emptyset \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F \cup G)$

53 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F^{-1})\ \&\ \mathbf{range}\,(F^{-1}) = \mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F^{-1}) = \mathbf{range}(F)$

54 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F) \rightarrow F = (F^{-1})^{-1}$

55 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F^{-1})\ \&\ F = (F^{-1})^{-1}\ \&\ \mathbf{range}\,(F^{-1}) = \mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F^{-1}) = \mathbf{range}(F)$

56 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F) \mid F^{-1} \restriction (F \restriction \mathsf{x}) = \mathsf{x}]$

57 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F) \mid F^{-1} \restriction (F \restriction \mathsf{x}) = \mathsf{x}]\ \&\ [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{range}(F) \mid F \restriction (F^{-1} \restriction \mathsf{x}) = \mathsf{x}]$

-- Elementary Properties of identity maps

58 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(\iota_S)\ \&\ \mathbf{domain}(\iota_S) = S\ \&\ \mathbf{range}(\iota_S) = S\ \&\ {\iota_S}^{-1} = \iota_S\ \&\ [\forall \mathsf{x} \in S \mid \iota_S \restriction \mathsf{x} = \mathsf{x}]$
$\&\ (\mathsf{is\_map}(F) \rightarrow (\mathbf{domain}(F) \subseteq S \rightarrow F \circ \iota_S = F)\ \&\ (\mathbf{range}(F) \subseteq S \rightarrow \iota_S \circ F = F))$

59 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow F \circ F^{-1} = \iota_{\mathbf{range}(F)}$

60 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow F \circ F^{-1} = \iota_{\mathbf{range}(F)}\ \&\ F^{-1} \circ F = \iota_{\mathbf{domain}(F)}$

-- An inverse pair of maps must be 1-1 and must be each others inverses

61 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F)\ \&\ \mathsf{is\_map}(G)\ \&\ \mathbf{domain}(F) = \mathbf{range}(G)\ \&\ \mathbf{range}(F) = \mathbf{domain}(G)\ \&\ F \circ G = \iota_{\mathbf{range}(F)}$
$\&\ G \circ F = \iota_{\mathbf{domain}(F)} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ G = F^{-1}$

62 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F \circ G)$

63 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G) \rightarrow \mathsf{Svm}(F \circ G)$

64 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ X \in \mathbf{domain}(G)\ \&\ \mathbf{range}(G) \subseteq \mathbf{domain}(F) \rightarrow F \circ G \restriction X = F \restriction (G \restriction X)$

64*a* $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ X \in \mathbf{domain}(G)\ \&\ \mathbf{range}(G) \subseteq \mathbf{domain}(F) \rightarrow F \circ G \restriction X = F \restriction (G \restriction X)$
$\&\ F \circ G = \{\langle \mathsf{x}, F \restriction (G \restriction \mathsf{x}) \rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(G)\}\ \&\ \mathbf{range}\,(F \circ G) = \{F \restriction (G \restriction \mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(G)\}$

65 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(G) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F \circ G)$

66 $\vdash$ $(F \cup \mathsf{H}) \circ G = F \circ G \cup \mathsf{H} \circ G$

67 $\vdash$ $G \circ (F \cup \mathsf{H}) = G \circ F \cup G \circ \mathsf{H}$

-- Cartesian Product

17 $\Rightarrow$ $X \times Y \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle : \mathsf{x} \in Y, \mathsf{y} \in X\}$

68 $\vdash$ $F = \{\langle \langle \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle, \mathsf{z} \rangle, \langle \mathsf{x}, \langle \mathsf{y}, \mathsf{z} \rangle \rangle \rangle : \mathsf{x} \in A, \mathsf{y} \in B, \mathsf{z} \in C\} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathbf{domain}(F) = (A \times B) \times C$
$\&\ \mathbf{range}(F) = A \times (B \times C)$

69 $\vdash$ $F = \{\langle \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle, \langle \mathsf{y}, \mathsf{x} \rangle \rangle : \mathsf{x} \in A, \mathsf{y} \in B\} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathbf{domain}(F) = A \times B\ \&\ \mathbf{range}(F) = B \times A$

-- % Basic properties of the cardinality of a set, and related properties of ordinals. The notion of 'finiteness'

70 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, X \in S \rightarrow \mathsf{enum}(X,S)=X$

-- Cardinality Lemma

71 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\#S) \,\&\, [\exists \mathsf{f} \mid 1\text{–}1(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f})=S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\#S$
$\&\, \neg[\exists \mathsf{o} \in \#S, \exists \mathsf{g} \mid 1\text{–}1(\mathsf{g}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{g})=S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\mathsf{o}]]$

-- The enumerating ordinal of a set has the same cardinality as the set

72 $\vdash$ $[\exists \mathsf{o} \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{o}) \,\&\, S=\{\mathsf{enum}(\mathsf{x},S) : \mathsf{x} \in \mathsf{o}\} \,\&\, \#\mathsf{o}=\#S]$

-- 'arb' is monotone decreasing for non-empty sets of ordinals

73 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(R) \,\&\, R \supseteq S \,\&\, S \supseteq T \rightarrow \mathbf{arb}(S) \in \mathbf{arb}(T) \vee \mathbf{arb}(S)=\mathbf{arb}(T) \vee T=\emptyset$

-- Lemma for following theorem

74 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, T \subseteq S \,\&\, X \in S \,\&\, Y \in X \rightarrow \mathsf{enum}(Y,T) \in \mathsf{enum}(X,T) \vee \mathsf{enum}(X,T) \supseteq T$

-- Subsets enumerate at least as rapidly

75 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, T \subseteq S \,\&\, X \in S \rightarrow \mathsf{enum}(X,T) \supseteq X$

76 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, T \subseteq S \rightarrow \{\mathsf{enum}(\mathsf{x},T) : \mathsf{x} \in S\} \supseteq T$

77 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, T \subseteq S \rightarrow [\exists \mathsf{x} \subseteq S \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{x}) \,\&\, T=\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},T) : \mathsf{y} \in \mathsf{x}\}$
$\&\, [\forall \mathsf{y} \in \mathsf{x}, \forall \mathsf{z} \in \mathsf{x} \mid \mathsf{y} \neq \mathsf{z} \rightarrow \mathsf{enum}(\mathsf{y},T) \neq \mathsf{enum}(\mathsf{z},T)]]$

-- Subsets of an ordinal have a cardinality that is no larger than the ordinal

78 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, T \subseteq S \rightarrow \#T \subseteq S$

-- Single-valued maps have 1-1 partial inverses

79 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow [\exists \mathsf{h} \mid \mathbf{domain}(\mathsf{h})=\mathbf{range}(F) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{h}) \subseteq \mathbf{domain}(F) \,\&\, 1\text{–}1(\mathsf{h})$
$\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{range}(F) \mid F \upharpoonright (\mathsf{h} \upharpoonright \mathsf{x})=\mathsf{x}]]$

-- Cardinality theorem

80 $\vdash$ $\mathsf{Card}(\#S) \,\&\, [\exists \mathsf{f} \mid 1\text{–}1(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f})=S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\#S]$

81 $\vdash$ $\#S=\emptyset \leftrightarrow S=\emptyset$

-- Uniqueness of Cardinality

82 $\vdash$ $\mathsf{Card}(C) \,\&\, [\exists \mathsf{f} \mid 1\text{–}1(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f})=S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=C] \rightarrow C=\#S$

-- Subset cardinality theorem

83 $\vdash$ $T \subseteq S \rightarrow \#T \subseteq \#S$

84 $\vdash$ $1\text{–}1(F) \rightarrow \#\mathbf{range}(F)=\#\mathbf{domain}(F)$

85 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \#\mathbf{range}(F) \subseteq \#\mathbf{domain}(F)$

85*a* $\vdash$ $F \subseteq G \rightarrow \mathbf{range}(F) \subseteq \mathbf{range}(G) \,\&\, \mathbf{domain}(F) \subseteq \mathbf{domain}(G)$

-- Finiteness

18 $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(X) \quad \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \neg[\exists \mathsf{f} \mid 1\text{–}1(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=X \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f}) \subseteq X \,\&\, X \neq \mathbf{range}(\mathsf{f})]$

-- 0 is a finite cardinal

86 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\emptyset) \,\&\, \mathsf{Finite}(\emptyset) \,\&\, \mathsf{Card}(\emptyset)$

87 $\vdash$ $\#\mathbf{domain}(F) \subseteq \#F$

88 $\vdash$ $\#\mathbf{range}(F) \subseteq \#F$

89 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \#\mathbf{domain}(F)=\#F$

90 $\vdash$ $\#S \supseteq \#T \leftrightarrow T=\emptyset \vee [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=S \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f})=T]$

91 $\vdash$ $\#S=\#T \leftrightarrow [\exists \mathsf{f} \mid 1\text{–}1(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=S \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f})=T]$

ENTER_THEORY fcn_symbol

-- Add an additional results to the fcn_symbol theory

$\vdash$ $\#\{\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x}) \rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{s}\}=\#\mathsf{s} \,\&\, \#\{\mathsf{f}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s}\} \subseteq \#\mathsf{s}$

ENTER_THEORY set_theory

-- Return to the top-level theory

92 $\vdash$ $\mathsf{Card}(S) \leftrightarrow S=\#S$

93 $\vdash$ $\#S=\#\#S$

94 $\vdash$ $\#S \in \#T \vee \#S=\#T \vee \#T \in \#S$

95 $\vdash$ $\#S \in \#T \,\&\, \#T \in \#R \rightarrow \#S \in \#R$

-- Associative Law for Cardinals

96 $\vdash$ $\#((A \times B) \times C)=\#(A \times (B \times C))$

-- Commutative Law for Cardinals

97 $\vdash$ $\#(A \times B)=\#(B \times A)$

-- % Properties of finite sets

-- A subset of a finite set is finite

98 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \,\&\, S \supseteq T \rightarrow \mathsf{Finite}(T)$

99 ⊢ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow (\mathsf{1\text{–}1}(F) \leftrightarrow [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F), \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(F) \mid F\restriction\mathsf{x} = F\restriction\mathsf{y} \rightarrow \mathsf{x}=\mathsf{y}])$

-- A 1-1 map on a set induces a 1-1 map on the power set of its domain

100 ⊢ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \,\&\, S \subseteq \mathbf{domain}(F) \,\&\, T \subseteq \mathbf{domain}(F) \,\&\, S \neq T \rightarrow \mathbf{range}(F_{|S}) \neq \mathbf{range}(F_{|T})$

-- Map product formula

101 ⊢ $\mathsf{Svm}(F) \,\&\, \mathsf{Svm}(G) \,\&\, \mathbf{range}(F) \subseteq \mathbf{domain}(G) \rightarrow G \circ F = \{\langle \mathsf{x}, G\restriction(F\restriction\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F)\}$
$\&\, \mathbf{domain}\,(G \circ F) = \mathbf{domain}(F) \,\&\, \mathbf{range}\,(G \circ F) = \{G\restriction(F\restriction\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F)\}$

102 ⊢ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F))$

103 ⊢ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow (\mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F)))$

-- A single-valued map with finite domain has finite range

104 ⊢ $\mathsf{Svm}(\mathsf{F}) \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F))$

105 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\#S)$

-- Proper subsets of a finite set have fewer elements

106 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \,\&\, T \subseteq S \,\&\, T \neq S \rightarrow \#T \in \#S$

107 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \neg[\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f}) = S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \subseteq S \,\&\, S \neq \mathbf{domain}(\mathsf{f})]$

108 ⊢ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, \mathsf{Finite}(S) \,\&\, T \in S \rightarrow \mathsf{Finite}(T)$

-- Any infinite ordinal is larger than any finite ordinal

109 ⊢ $\mathsf{Ord}(S) \,\&\, \mathsf{Ord}(T) \,\&\, \neg\mathsf{Finite}(S) \,\&\, \mathsf{Finite}(T) \rightarrow T \in S$

-- Interchange Lemma

110 ⊢ $X \in S \,\&\, Y \in S \rightarrow [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f}) = S \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f}) = S \,\&\, \mathsf{f}\restriction X = Y \,\&\, \mathsf{f}\restriction Y = X]$

111 ⊢ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow F_{|S} = \{\langle \mathsf{x}, F\restriction\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \mid \mathsf{x} \in S\} \,\&\, \mathbf{domain}(F_{|S}) = \{\mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F) \mid \mathsf{x} \in S\}$
$\&\, \mathbf{range}(F_{|S}) = \{F\restriction\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \mid \mathsf{x} \in S\}$

112 ⊢ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \,\&\, X \in \mathbf{domain}(F) \,\&\, Y \in \mathbf{domain}(F) \,\&\, F\restriction X = F\restriction Y \rightarrow X = Y$

113 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(S \cup \{X\})$

114 ⊢ $\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathsf{next}(S))$

-- % Existence of an infinite cardinal

115 ⊢ $\neg\mathsf{Finite}(\mathsf{s\_inf})$

-- Infinite cardinality theorem

116 ⊢ $\neg\mathsf{Finite}(\#\mathsf{s\_inf})$

-- All finite ordinals are cardinals

117 ⊢ $\mathsf{Ord}(X) \,\&\, \mathsf{Finite}(X) \rightarrow \mathsf{Card}(X)$

-- % The set of integers and basic properties of integers

18*a* ⇛ $\mathbb{N} =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\{\mathsf{x} \in \mathsf{next}(\#\mathsf{s\_inf}) \mid \neg\mathsf{Finite}(\mathsf{x})\})$

118 ⊢ $\mathsf{Ord}(\mathbb{N}) \,\&\, \neg\mathsf{Finite}(\mathbb{N}) \,\&\, [\forall \mathsf{x} \mid \mathsf{Card}(\mathsf{x}) \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \mathsf{x} \in \mathbb{N}]$

-- Standard definitions of the finite integers,

-- 1 = next (0) & 2 = next (1) & 3 = next (2) & ⋯

18*b* ⇛ $1 =_{\mathrm{Def}} \mathsf{next}(\emptyset)$

119 ⊢ $\mathsf{Ord}(\emptyset) \,\&\, \emptyset \in \mathbb{N} \,\&\, 1 \in \mathbb{N} \,\&\, 2 \in \mathbb{N} \,\&\, 3 \in \mathbb{N}$

-- The set of integers is a Cardinal

120 ⊢ $\mathsf{Card}(\mathbb{N})$

121 ⊢ $\emptyset \in \mathbb{N} \,\&\, 1 \in \mathbb{N} \,\&\, 2 \in \mathbb{N} \,\&\, 3 \in \mathbb{N} \,\&\, 1 \neq \emptyset \,\&\, 2 \neq \emptyset \,\&\, 3 \neq \emptyset \,\&\, 1 \neq 2 \,\&\, 1 \neq 3 \,\&\, 2 \neq 3$

-- Cardinal sum

19 ⇛ $\mathsf{n} + \mathsf{m} =_{\mathrm{Def}} \#\{\langle \mathsf{x}, \emptyset\rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{n}\} \cup \{\langle \mathsf{x}, 1\rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{m}\}$

-- Cardinal product

20 ⇛ $X * Y =_{\mathrm{Def}} \#(X \times Y)$

21 ⇛ $\mathcal{P}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \subseteq X\}$

-- Cardinal Difference

22 ⇛ $X - Y =_{\mathrm{Def}} \#(X \setminus Y)$

-- Integer Quotient; Note that x **div** $0 = \mathbb{N}$ for $x \in \mathbb{N}$

23 ⇛ $X \;\mathbf{div}\; Y =_{\mathrm{Def}} \bigcup\{\mathsf{k} \in \mathbb{N} \mid \mathsf{k} * Y \subseteq X\}$

-- Integer Remainder

24 ⇛ $X \;\mathbf{mod}\; Y =_{\mathrm{Def}} X - (X \;\mathbf{div}\; Y) * Y$

122 $\vdash$ $\{\langle x,\emptyset\rangle : x\in N\}\cap\{\langle x,1\rangle : x\in M\}=\emptyset$
123 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(\emptyset)\ \&\ \mathsf{Svm}(\emptyset)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(\emptyset)\ \&\ \mathbf{range}(\emptyset)=\emptyset\ \&\ \mathbf{domain}(\emptyset)=\emptyset$
124 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(\{\langle X,Y\rangle\})\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(\{\langle X,Y\rangle\})\ \&\ \{\langle X,Y\rangle\}\restriction X=Y$
125 $\vdash$ $X\neq\mathbb{N}\rightarrow\{\langle X,Y\rangle,\langle\mathbb{N},W\rangle\}\restriction X=Y$
126 $\vdash$ $\#\{\langle x,\emptyset\rangle : x\in M\}=\#M\ \&\ \#\{\langle x,1\rangle : x\in N\}=\#N$
127 $\vdash$ $N+M=\#N+\#M$
128 $\vdash$ $N+M=N+\#M$
129 $\vdash$ $N*M=\#N*\#M$
130 $\vdash$ $N*M=N*\#M$
131 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)\ \&\ M\subseteq N\ \&\ M\neq N\rightarrow\#M\in\#N$

-- % Induction principle for finite sets

THEORY $\mathsf{finite\_induction}(\mathsf{n},P)$
$\mathsf{Finite}(\mathsf{n})\ \&\ P(\mathsf{n})$
$\Longrightarrow$ (m)
$\mathsf{m}\subseteq\mathsf{n}\ \&\ P(\mathsf{m})\ \&\ [\forall\mathsf{k}\subseteq\mathsf{m}\mid\mathsf{k}\neq\mathsf{m}\rightarrow\neg P(\mathsf{k})]$
END finite_induction

-- % More results on the cardinality of finite and infinite sets

132 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)\ \&\ \mathsf{Finite}(M)\leftrightarrow\mathsf{Finite}(N\cup M)$
133 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N+M)\leftrightarrow\mathsf{Finite}(N\cup M)$
134 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)\ \&\ \mathsf{Finite}(M)\leftrightarrow\mathsf{Finite}(N+M)$
135 $\vdash$ $N\times\emptyset=\emptyset\ \&\ \emptyset\times N=\emptyset$
136 $\vdash$ $N*\emptyset=\emptyset$
137 $\vdash$ $\emptyset*N=\emptyset$
138 $\vdash$ $\#N+\emptyset=\#N$
139 $\vdash$ $\#\{C\}\times N=\#N$
140 $\vdash$ $\#N\times\{C\}=\#N$
141 $\vdash$ $1*N=\#N$
142 $\vdash$ $N*1=\#N$
143 $\vdash$ $M\neq\emptyset\rightarrow\#N\times M\supseteq\#N$
144 $\vdash$ $N+M=\#N\times\{\emptyset\}\cup M\times\{1\}$
145 $\vdash$ $A\cap B=\emptyset\rightarrow(X\times A)\cap(Y\times B)=\emptyset$
146 $\vdash$ $N+M=M+N$
147 $\vdash$ $N*M=M*N$
148 $\vdash$ $(A\times X)\cap(B\times X)=(A\cap B)\times X\ \&\ (A\times X)\cup(B\times X)=(A\cup B)\times X$
$\&\ (X\times A)\cap(X\times B)=X\times(A\cap B)\ \&\ (X\times A)\cup(X\times B)=X\times(A\cup B)$
149 $\vdash$ $N+(M+K)=(N+M)+K$
150 $\vdash$ $N*(M*K)=(N*M)*K$
151 $\vdash$ $N*(M+K)=N*M+N*K$
152 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)\ \&\ \mathsf{Finite}(M)\rightarrow\mathsf{Finite}(N*M)$
153 $\vdash$ $(\mathsf{Finite}(N)\ \&\ \mathsf{Finite}(M))\vee N=\emptyset\vee M=\emptyset\leftrightarrow\mathsf{Finite}(N*M)$
154 $\vdash$ $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$
155 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)\leftrightarrow\mathsf{Finite}(\mathcal{P}(N))$

-- % Cantor's Theorem

156 $\vdash$ $\#N\in\#\mathcal{P}(N)$
157 $\vdash$ $N-N=\emptyset$
158 $\vdash$ $N-\emptyset=\#N$

-- % More elementary results concerning integer arithmetic

-- Disjoint sum Lemma

159 ⊢ $N \cap M = \emptyset \rightarrow N + M = \# N \cup M$

160 ⊢ $N \cap M = \emptyset \;\&\; \mathsf{N2} \cap \mathsf{M2} = \emptyset \;\&\; \# N = \# \mathsf{N2} \;\&\; \# M = \# \mathsf{M2} \rightarrow \#(N \cup M) = \#(\mathsf{N2} \cup \mathsf{M2})$

-- Subtraction Lemma

161 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow \# N = \# M + (N - M)$

-- Subtraction Lemma

162 ⊢ $\# M \in \# N \vee \# M = \# N \rightarrow \# N = \# M + (\# N - \# M)$

-- Union Set

25 ⇛ $\bigcup X =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{y}, \mathsf{y} \in X\}$

-- Union set as an upper bound

163 ⊢ $[\forall \mathsf{x} \in S \mid \mathsf{x} \subseteq \bigcup S] \;\&\; ([\forall \mathsf{x} \in S \mid \mathsf{x} \subseteq T] \rightarrow \bigcup S \subseteq T)$

-- The union of a set of ordinals is an ordinal

164 ⊢ $[\forall \mathsf{x} \in S \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{x})] \rightarrow \mathsf{Ord}(\bigcup S)$

165 ⊢ $M \neq \emptyset \rightarrow N \;\mathbf{div}\; M \subseteq N$

166 ⊢ $M \neq \emptyset \;\&\; N \in \mathbb{N} \rightarrow N \;\mathbf{div}\; M \in \mathbb{N} \;\&\; N \;\mathbf{div}\; M \subseteq N$

167 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N + M \in \mathbb{N} \;\&\; N * M \in \mathbb{N} \;\&\; N - M \in \mathbb{N}$

-- Strict monotonicity of addition

169 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; N \neq \emptyset \rightarrow M \in M + N$

-- Strict monotonicity of addition

170 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in N \rightarrow M + K \in M + N$

-- Cancellation

171 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; M + K = N + K \rightarrow M = N$

-- Monotonicity of Addition

172 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow M + K \subseteq N + K$

-- Monotonicity of Multiplication

173 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow M * K \subseteq N * K$

-- Monotonicity of Addition

174 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \rightarrow (M + K \subseteq N + K \leftrightarrow M \subseteq N)$

-- Strict monotonicity of subtraction

175 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in N \;\&\; M \supseteq N \rightarrow M - N \in M - K$

176 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; N \supseteq M \;\&\; N - M \supseteq K \rightarrow N \supseteq M + K \;\&\; N - (M + K) = (N - M) - K$

177 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \rightarrow M + N - N = M$

-- Integer Division with Remainder

178 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; N \neq \emptyset \rightarrow M \;\mathbf{div}\; N \in \mathbb{N} \;\&\; M \supseteq (M \;\mathbf{div}\; N) * N \;\&\; M \;\mathbf{mod}\; N \in N$

179 ⊢ $\#\{S\} = \{\emptyset\}$

180 ⊢ $\# N = \emptyset \rightarrow N = \emptyset$

181 ⊢ $\# N * \# M = \emptyset \leftrightarrow N = \emptyset \vee M = \emptyset$

182 ⊢ $N \supseteq M \rightarrow N - K \supseteq M - K$

183 ⊢ $\mathsf{Finite}(N) \;\&\; N \supseteq M \rightarrow \# N \backslash M = \#\# N \backslash \# M$

184 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N + M - M = N$

185 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \rightarrow (N \supseteq M \leftrightarrow N + K \supseteq M + K)$

186 ⊢ $N \supseteq M \rightarrow \# N = \# M + \#(N \backslash M)$

187 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; N \supseteq M \rightarrow N + K - (M + K) = N - M$

188 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N = M + (N - M) \vee N = M - (M - N)$

-- % Four utility theories concerning ordinal-valued functions, well-founded relations, well-orderings,
-- % and the ordering of product sets

THEORY ordval_fcn(s, f)

-- Elementary functions of

$\mathsf{s} \neq \emptyset \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{f}(\mathsf{x}))]$

⟹ (rng) -- Points at which f attains its minimum

-- $\mathsf{rng} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathbf{arb}(\{\mathsf{f}(\mathsf{u}) : \mathsf{u} \in \mathsf{s}\})\}$

$\mathsf{rng} = \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathbf{arb}(\{\mathsf{f}(\mathsf{y}) : \mathsf{y} \in \mathsf{s}\}) \;\&\; \mathsf{rng} \neq \emptyset \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{rng}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{f}(\mathsf{x}) \subseteq \mathsf{f}(\mathsf{y})]\}$

$\mathsf{rng} \subseteq \mathsf{s}$

END ordval_fcn

THEORY well_founded_set(s, $\lhd$)

[∀t⊆s | t≠∅ → [∃m ∈ t, ∀u ∈ t | ¬u ◁ m]]

-- ◁ is thereby assumed to be an irreflexive well-founded relation on s

⟹ (orden)

well_founded_set · 1 ⊢ [∀x ∈ s, ∀y ∈ s | (x ◁ y → ¬y ◁ x) & ¬x ◁ x]

-- Minrel(T) $=_{\text{Def}}$ **if** T⊆s & T≠∅ **then arb**({m : m ∈ T | [∀u ∈ T | ¬u ◁ m]}) **else** s **fi**

-- orden(X) $=_{\text{Def}}$ Minrel(s\{orden(y) : y ∈ X})

well_founded_set · 2 ⊢ s⊆{orden(y) : y ∈ X} ↔ orden(X)=s

well_founded_set · 3 ⊢ orden(X)≠s ↔ orden(X) ∈ s

-- Well-ordering complies with ordinal enumeration

well_founded_set · 5 ⊢ Ord(U) & Ord(V) & orden(U)≠s & orden(V)≠s → (orden(U) ◁ orden(V) → U ∈ V)

well_founded_set · 6 ⊢ {u : u ∈ s | u ◁ orden(V)}⊆{orden(x) : x ∈ V}

-- Well-ordering is initially 1-1

well_founded_set · 7 ⊢ Ord(U) & Ord(V) & orden(U)≠s & orden(V)≠s & U≠V → orden(U)≠orden(V)

well_founded_set · 8 ⊢ [∃o | Ord(o) & s={orden(x) : x ∈ o} & 1–1({⟨x, orden(x)⟩ : x ∈ o})]

END well_founded_set

THEORY well_ordered_set(s, ◁)

[∀x ∈ s, ∀y ∈ s | (x ◁ y ∨ y ◁ x ∨ x=y) & ¬x ◁ x] & [∀x ∈ s, ∀y ∈ s, ∀z ∈ s | x ◁ y & y ◁ z → x ◁ z]

& [∀t⊆s | t≠∅ → [∃x ∈ t, ∀y ∈ t | x ◁ y ∨ x=y]]

⟹ (orden)

well_ordered_set · 1 ⊢ [∀t⊆s, ∃x | t≠∅ → x ∈ t & [∀y ∈ t | x ◁ y ∨ x=y]]

-- Minrel ⟶ well_ordered_set · 1 ⟹ [∀t⊆s | t≠∅ → Minrel(t) ∈ t & [∀y ∈ t | Minrel(t) ◁ y ∨ Minrel(t)=y]]

-- orden(X) $=_{\text{Def}}$ **if** s⊆{orden(y) : y ∈ X} **then** s **else** Minrel(s\{orden(y) : y ∈ X}) **fi**

well_ordered_set · 2 ⊢ s⊆{orden(y) : y ∈ X} ↔ orden(X)=s

well_ordered_set · 3 ⊢ orden(X)≠s → orden(X) ∈ s

-- Monotonicity of Minrel

-- well_ordered_set · 4 ⊢ R⊆s & T⊆R & T≠∅ → Minrel(R)=Minrel(T) ∨ Minrel(R) ◁ Minrel(T)

-- Well-ordering is isomorphic to ordinal enumeration

well_ordered_set · 5 ⊢ Ord(U) & Ord(V) & orden(U)≠s & orden(V)≠s → (orden(U) ◁ orden(V) ↔ U ∈ V)

well_ordered_set · 6 ⊢ Ord(V) & orden(V)≠s → {u : u ∈ s | u ◁ orden(V)}={orden(x) : x ∈ V}

-- Well-ordering is initially 1-1

well_ordered_set · 7 ⊢ Ord(U) & Ord(V) & orden(U)≠s & orden(V)≠s & U≠V → orden(U)≠orden(V)

well_ordered_set · 8 ⊢ [∃o | Ord(o) & s={orden(x) : x ∈ o} & [∀x ∈ o | orden(x)≠s] & 1–1({⟨x, orden(x)⟩ : x ∈ o})]

well_ordered_set · 9 ⊢ (Ord(V) & orden(V)≠s → 1–1({⟨x, orden(x)⟩ : x ∈ V}))

& **domain**({⟨x, orden(x)⟩ : x ∈ V})=V

& **range**({⟨x, orden(x)⟩ : x ∈ V})={u : u ∈ s | u ◁ orden(V)}

& {u : u ∈ s | u ◁ orden(V)}={orden(x) : x ∈ V}

END well_ordered_set

THEORY product_order(o1, o2)

Ord(o1) & Ord(o2)

⟹ (Ord1p2)

-- Ord1p2(X, Y) $\leftrightarrow_{\text{Def}}$ car(X)∪cdr(X) ∈ car(Y)∪cdr(Y)

-- ∨ (car(X)∪cdr(X)=car(Y)∪cdr(Y) & car(X) ∈ car(Y))

-- ∨ (car(X)∪cdr(X)=car(Y)∪cdr(Y) & car(X)=car(Y) & cdr(X) ∈ cdr(Y))

product_order · 1 ⊢ [∀x ∈ o1×o2 | Ord(car(x))]

product_order · 2 ⊢ [∀x ∈ o1×o2 | Ord(cdr(x))]

product_order · 3 ⊢ [∀x ∈ o1×o2 | Ord(car(x)∪cdr(x))]

product_order · 4 ⊢ [∀x ∈ o1×o2, ∀y ∈ o1×o2 | Ord1p2(x, y) ∨ Ord1p2(y, x) ∨ x=y & ¬Ord1p2(x, x)]

product_order · 5 ⊢ [∀x ∈ o1×o2, ∀y ∈ o1×o2, ∀z ∈ o1×o2 | Ord1p2(x, y) & Ord1p2(y, z) → Ord1p2(x, z)]

product_order · 6 ⊢ T⊆o1×o2 & T≠∅ → [∃x ∈ T, ∀y ∈ t | Ord1p2(x, y) ∨ x=y]

END product_order

-- % The cardinal square theorem and lemmas needed to prove it

-- One more Lemma

189 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#S{=}\#S{\cup}\{C\}$

-- Division-by-2 Lemma

190 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow [\exists T \,|\, \#T{\times}\{\emptyset,1\}{=}\#S]$

-- Cardinal Doubling Theorem

191 $\vdash$ $\mathsf{Card}(S)\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#S{\times}\{\emptyset,1\}{=}\#S$

192 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow S{+}T{=}\#S{\cup}\#T\ \&\ \#(S{\cup}T){=}\#S{\cup}\#T$

-- Cardinal Square-root Lemma

193 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow [\exists T \,|\, \#(T{\times}T){=}\#S]$

-- Cardinal Square Theorem

194 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#(S{\times}S){=}\#S$

195 $\vdash$ $T \in S\ \&\ \mathsf{Card}(S)\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow S{*}T{=}S$

-- % Signed Integers and their properties

26 $\Rrightarrow$ $\mathbb{Z} \ =_{\mathrm{Def}}\ \{\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{N}, \mathsf{y} \in \mathbb{N} \,|\, \mathsf{x}{=}\emptyset \vee \mathsf{y}{=}\emptyset\}$

-- Signed Integer Reduction to Normal Form

27 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Red}(X) \ =_{\mathrm{Def}}\ \langle \mathsf{car}(X){-}(\mathsf{car}(X){\cap}\mathsf{cdr}(X)), \mathsf{cdr}(X){-}(\mathsf{car}(X){\cap}\mathsf{cdr}(X))\rangle$

-- Signed Sum

28 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{Z}} Y \ =_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{Red}(\langle \mathsf{car}(X){+}\mathsf{car}(Y), \mathsf{cdr}(X){+}\mathsf{cdr}(Y)\rangle)$

-- Absolute value

28*a* $\Rrightarrow$ $|X|_{\mathbb{Z}} \ =_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{car}(X){\cup}\mathsf{cdr}(X)$

-- Negative

28*b* $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(X) \ =_{\mathrm{Def}}\ \langle \mathsf{cdr}(X), \mathsf{car}(X)\rangle$

-- Signed Product

29 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{Z}} Y \ =_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{Red}(\langle \mathsf{car}(X){*}\mathsf{car}(Y){+}\mathsf{cdr}(X){*}\mathsf{cdr}(Y), \mathsf{car}(X){*}\mathsf{cdr}(Y){+}\mathsf{car}(Y){*}\mathsf{cdr}(X)\rangle)$

-- Signed Difference

32 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{Z}} Y \ =_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{Red}(\langle \mathsf{cdr}(Y){+}\mathsf{car}(X), \mathsf{car}(Y){+}\mathsf{cdr}(X)\rangle)$

-- Sign of a signed integer

33 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \ \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{car}(X){\supseteq}\mathsf{cdr}(X)$

196 $\vdash$ $M \in \mathbb{N}\ \&\ N \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle M,N\rangle) \in \mathbb{Z}\ \&\ M{\cap}N \in \mathbb{N}$

197 $\vdash$ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow N{=}\langle \mathsf{car}(N),\mathsf{cdr}(N)\rangle\ \&\ \mathsf{car}(N){=}\emptyset \vee \mathsf{cdr}(N){=}\emptyset\ \&\ \mathsf{car}(N) \in \mathbb{N}\ \&\ \mathsf{cdr}(N) \in \mathbb{N}\ \&\ \mathsf{Red}(N){=}N$
$\&\ \mathsf{car}(N){\cap}\mathsf{cdr}(N) \in \mathbb{N}$

199 $\vdash$ $N \in \mathbb{Z}\ \&\ M \in \mathbb{Z} \rightarrow N +_{\mathbb{Z}} M \in \mathbb{Z}\ \&\ N *_{\mathbb{Z}} M \in \mathbb{Z}$

200 $\vdash$ $N \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle N,N\rangle){=}\langle\emptyset,\emptyset\rangle$

201 $\vdash$ $J \in \mathbb{N}\ \&\ K \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle J{+}M, K{+}M\rangle){=}\mathsf{Red}(\langle J,K\rangle)$

202 $\vdash$ $J \in \mathbb{N}\ \&\ K \in \mathbb{N}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle J,K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N,M\rangle{=}\langle J,K\rangle +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N,M\rangle)$

203 $\vdash$ $K \in \mathbb{Z}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow K +_{\mathbb{Z}} \langle N,M\rangle{=}K +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N,M\rangle)$

204 $\vdash$ $K \in \mathbb{Z}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow K *_{\mathbb{Z}} \langle N,M\rangle{=}K *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N,M\rangle)$

-- Commutativity Lemma

205 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to K +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \langle N, M\rangle +_{\mathbb{Z}} K$

-- Commutativity Lemma

206 ⊢ $J \in \mathbb{N} \,\&\, K \in \mathbb{N} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to \langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \langle N, M\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle J, K\rangle$

-- Commutative Law for Addition

207 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N +_{\mathbb{Z}} M = M +_{\mathbb{Z}} N$

208 ⊢ $J \in \mathbb{N} \,\&\, K \in \mathbb{N} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to \langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \mathsf{Red}(\langle J, K\rangle) +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$

-- Commutative Law for Multiplication

209 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N *_{\mathbb{Z}} M = M *_{\mathbb{Z}} N$

-- Associative Law

210 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N +_{\mathbb{Z}} (M +_{\mathbb{Z}} K) = N +_{\mathbb{Z}} M +_{\mathbb{Z}} K$

-- Distributive Law

211 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N *_{\mathbb{Z}} (M +_{\mathbb{Z}} K) = N *_{\mathbb{Z}} M +_{\mathbb{Z}} N *_{\mathbb{Z}} K$

212 ⊢ $N \in \mathbb{N} \to \mathsf{Red}(\langle N, \emptyset\rangle) = \langle N, \emptyset\rangle$

-- Embedding of Integers in Signed Integers

213 ⊢ $N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to \langle N{+}M, \emptyset\rangle = \langle N, \emptyset\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle \,\&\, \langle N{*}M, \emptyset\rangle = \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle \,\&\, N \supseteq M$
$\to \langle N, \emptyset\rangle -_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle = \langle N{-}M, \emptyset\rangle$

214 ⊢ $N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Red}(\langle M, N\rangle)) = \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$

215 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M)$

-- Inversion Lemma

216 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) *_{\mathbb{Z}} M \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M) = N *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M)$

-- Double inversion

217 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(K)) = K$

218 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} N = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N)) = N$

-- Associativity Lemma

219 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} N = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N)) = N$

-- Associativity Lemma

220 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \to \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} (\langle M, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} K) = \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} K$

224 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to N = M +_{\mathbb{Z}} (N -_{\mathbb{Z}} M)$

225 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N +_{\mathbb{Z}} M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M)$

226 ⊢ $\langle \emptyset, 1\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, 1\rangle = \langle 1, \emptyset\rangle$

227 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \to K *_{\mathbb{Z}} \langle 1, \emptyset\rangle = K$

228 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \to K -_{\mathbb{Z}} M = K +_{\mathbb{Z}} M *_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, 1\rangle$

229 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \to K -_{\mathbb{Z}} K = \langle \emptyset, \emptyset\rangle$

230 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \to K +_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, \emptyset\rangle = K$

231 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \to \langle \emptyset, \emptyset\rangle +_{\mathbb{Z}} K = K$

-- $\mathbb{Z}$ is an Integral Domain

232 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \to \mathsf{m} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \vee \mathsf{n} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle]$

-- Distributivity of Subtraction

233 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = (\mathsf{m} -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k}) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n}]$

-- Si Cancellation

234 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} \,\&\, \mathsf{n} \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle \to \mathsf{m} = \mathsf{k}]$

-- Multiplication by -1

235 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{n}) = \langle \emptyset, 1\rangle *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n}]$

-- % Another useful transfinite induction principle, cast as a theory

THEORY ordinal_induction(o, P)

Ord(o) & P(o)

$\Longrightarrow$ (t)

-- t $=_{\text{Def}}$ **arb**({x⊆s | Ord(x) & P(x)})

Ord(t) & P(t) & t⊆o & [∀x ∈ t | ¬P(x)]

END ordinal_induction

-- % Properties of the transitive membership closure of s

35a $\Rightarrow$ $\mathsf{Ult\_membs}(X) =_{\text{Def}} X\cup\{\mathsf{y} :\ \mathsf{u} \in \{\mathsf{Ult\_membs}(\mathsf{x}) :\ \mathsf{x} \in X\}, \mathsf{y} \in \mathsf{u}\}$

236 $\vdash$ $S\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

237 $\vdash$ $\mathsf{Ult\_membs}(S)=S\cup\{\mathsf{y} :\ \mathsf{x} \in S, \mathsf{y} \in \mathsf{Ult\_membs}(\mathsf{x})\}$

238 $\vdash$ $X \in S \;\&\; Y \in X \rightarrow Y \in \mathsf{Ult\_membs}(S)$

239 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \rightarrow \mathsf{Ult\_membs}(S)=S$

240 $\vdash$ $\mathsf{Ult\_membs}(\{S\})=\{S\}\cup\mathsf{Ult\_membs}(S)$

241 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \rightarrow \mathsf{Ult\_membs}(\{S\})=S\cup\{S\}$

242 $\vdash$ $Y \in \mathsf{Ult\_membs}(S) \rightarrow \mathsf{Ult\_membs}(Y)\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

243 $\vdash$ $Y \in \mathsf{Ult\_membs}(S) \rightarrow Y\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

-- % Theories giving useful principles of transfinite and integer induction

THEORY transfinite_member_induction(n, P)
$P(\mathsf{n})$
$\Longrightarrow$ (m)
-- $\mathsf{m} =_{\text{Def}} \mathbf{arb}(\{\mathsf{k} \in \mathsf{Ult\_membs}(\{\mathsf{n}\}) \mid P(\mathsf{k})\})$
$P(\mathsf{m}) \;\&\; \mathsf{m} \in \mathsf{Ult\_membs}(\{\mathsf{n}\}) \;\&\; [\forall \mathsf{k} \in \mathsf{m} \mid \neg P(\mathsf{k})]$
END transfinite_member_induction

THEORY mathematical_induction(P)
$[\exists \mathsf{n} \in \mathbb{N} \mid P(\mathsf{n})]$
$\Longrightarrow$ (m)
$\vdash$ $\mathsf{m} \in \mathbb{N} \;\&\; P(\mathsf{m}) \;\&\; [\forall \mathsf{n} \in \mathsf{m} \mid \neg P(\mathsf{n})]$
END mathematical_induction

THEORY double_transfinite_induction(o, R)
$[\exists \mathsf{n} \in \mathsf{o}, \exists \mathsf{k} \in \mathsf{o} \mid R(\mathsf{n},\mathsf{k})]$
$\Longrightarrow$ (m, j)
$\vdash$ $R(\mathsf{m},\mathsf{j}) \;\&\; [\forall \mathsf{k} \in \mathsf{m}, \forall \mathsf{h} \in \mathsf{o} \mid \neg R(\mathsf{k},\mathsf{h})] \;\&\; [\forall \mathsf{i} \in \mathsf{j} \mid \neg R(\mathsf{m},\mathsf{i})]$
END double_transfinite_induction

THEORY double_induction(R)
$[\exists \mathsf{n} \in \mathbb{N}, \exists \mathsf{k} \in \mathbb{N} \mid R(\mathsf{n},\mathsf{k})]$
$\Longrightarrow$ (m, j)
$\vdash$ $R(\mathsf{m},\mathsf{j}) \;\&\; [\forall \mathsf{k} \in \mathsf{m}, \forall \mathsf{j} \in \mathbb{N} \mid \neg R(\mathsf{k},\mathsf{j})] \;\&\; [\forall \mathsf{i} \in \mathsf{j} \mid \neg R(\mathsf{m},\mathsf{i})]$
END double_induction

-- % Several theories satisfying free use of finitely recursive definitions of functions on the integers

THEORY finite_recursive_definition(f, g, P)
$\Longrightarrow$ (h)
$\vdash$ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{N}, \exists \mathsf{h}, \forall \mathsf{s}, \forall \mathsf{x} \mid \#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n} \rightarrow \mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g2}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{s}) :\ \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x} \mid \mathsf{y}\neq\mathsf{x} \;\&\; P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
-- $\Rrightarrow$ $[\forall \mathsf{s}, \forall \mathsf{x} \mid \#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n} \rightarrow \mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g2}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{s}) :\ \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x} \mid \mathsf{y}\neq\mathsf{x} \;\&\; P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
$\vdash$ $[\exists \mathsf{h}, \forall \mathsf{n} \in \mathbb{N}, \forall \mathsf{s}, \forall \mathsf{x} \mid \#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n} \rightarrow \mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s}) :\ \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x} \mid \mathsf{y}\neq\mathsf{x} \;\&\; P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
-- $\Rrightarrow$ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{N}, \forall \mathsf{s}, \forall \mathsf{x} \mid \#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n} \rightarrow \mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s}) :\ \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x} \mid \mathsf{y}\neq\mathsf{x} \;\&\; P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
$\vdash$ $\mathsf{Finite}(X) \rightarrow \mathsf{h}(X,S)=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},S),X,\mathsf{y},S) :\ \mathsf{y}\subseteq X \mid \mathsf{y}\neq X \;\&\; P(X,\mathsf{y},S)\},X,S)$
END finite_recursive_definition

THEORY finite_recursive_definition2(f0, g0)
$\Longrightarrow$ (h)
$\mathsf{Finite}(X) \rightarrow \mathsf{h}(X,S)=\textbf{if } X=\emptyset \textbf{ then } \mathsf{f0}(S) \textbf{ else } \mathsf{g0}(\mathsf{h}(X\backslash\{\mathbf{arb}(X)\},S),X,S) \textbf{ fi}$
END finite_recursive_definition2

THEORY finite_recursive_definition3(f, g)
$\Longrightarrow$ (h)
$\mathsf{Finite}(X) \rightarrow \mathsf{h}(X)=\textbf{if } \mathsf{x}=\emptyset \textbf{ then } \mathsf{f} \textbf{ else } \mathsf{g2}(\mathsf{h}(X\backslash\{\mathbf{arb}(X)\}),X) \textbf{ fi}$
END finite_recursive_definition3

-- % A theory justifying the use of summation operators and giving the basic properties of such operators

THEORY sigma_theory(s, $\oplus$, e)

e $\in$ s
[$\forall$x $\in$ s | x$\oplus$e=x]
[$\forall$x $\in$ s, $\forall$y $\in$ s | x$\oplus$y=y$\oplus$x]
[$\forall$x $\in$ s, $\forall$y $\in$ s, $\forall$z $\in$ s | (x$\oplus$y)$\oplus$z=x$\oplus$(y$\oplus$z)]

$\Longrightarrow$ ($\sum$)

-- **APPLY** finite_recursive_definition3(f $\mapsto$ e, g2(y, x) $\mapsto$ y$\oplus$cdr(**arb**(x))) $\Longrightarrow$ [$\sum$]
-- $\sum(X)$=**if** $X=\emptyset$ **then** e **else** $\sum(X\setminus\{\mathbf{arb}(X)\})\oplus$cdr($\mathbf{arb}(X)$) **fi**
--

$\vdash$ $\sum(\emptyset)$=e
$\vdash$ [$\forall$x | cdr(x) $\in$ s $\rightarrow$ $\sum(\{x\})$=cdr(x)]
$\vdash$ Finite(F) & **range**(F)$\subseteq$s $\rightarrow$ $\sum(F)$ $\in$ s
$\vdash$ Finite(F) & **range**(F)$\subseteq$s & $C \in F$ $\rightarrow$ $\sum(F)=\sum(F\setminus\{C\})\oplus$cdr($C$)
$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s $\rightarrow$ [$\forall$t | $\sum(F)=\sum(F_{|\mathbf{domain}(F)\cap t})\oplus\sum(F_{|\mathbf{domain}(F)\setminus t})$]

-- Rearrangement-of-sums Theorem

$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s & Svm(G) & **domain**(F)=**domain**(G)
$\rightarrow \sum(F)=\sum\left(\left\{\langle y, \sum\left(F_{|\mathbf{range}((G)^{-1}{}_{|\{y\}})}\right)\rangle : y \in \mathbf{range}(G)\right\}\right)$

-- Sum Permutation Theorem

$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s & 1–1(G) & **domain**(F)=**domain**(G)
$\rightarrow \sum(F)=\sum\left(\left\{\langle y, \sum\left(F_{|\mathbf{range}((G)^{-1}{}_{|\{y\}})}\right)\rangle : y \in \mathbf{range}(G)\right\}\right)$

END sigma_theory

-- % A theory justifying the standard mathematical use of 'equivalence classes'

THEORY equivalence_classes(P, s)

-- Theory of equivalence classes

$[\forall x \in s, \forall y \in s \mid (P(x,y) \leftrightarrow P(y,x)) \,\&\, P(x,x)]$

$[\forall x \in s, \forall y \in s, \forall z \in s \mid P(x,y) \,\&\, P(y,z) \rightarrow P(x,z)]$

$\Longrightarrow$ (Eqc, f)

$[\forall x \in s \mid f(x) \in \mathrm{Eqc}] \,\&\, [\forall y \in \mathrm{Eqc} \mid \mathbf{arb}(y) \in s \,\&\, f(\mathbf{arb}(y)) = y]$

$[\forall x \in s, \forall y \in s \mid P(x,y) \leftrightarrow f(x) = f(y)]$

$[\forall x \in s \mid P(x, \mathbf{arb}(f)(x))]$

END equivalence_classes

35 $\Rrightarrow$ $\mathrm{Fr} =_{\mathrm{Def}} \{\langle x, y\rangle : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \mid y \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle\}$

36 $\Rrightarrow$ $X \approx_{\mathrm{Fr}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathrm{car}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(Y) = \mathrm{cdr}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(Y)$

245 $\vdash$ $[\forall x \in \mathrm{Fr}, \forall y \in \mathrm{Fr} \mid (x \approx_{\mathrm{Fr}} y \leftrightarrow y \approx_{\mathrm{Fr}} x) \,\&\, x \approx_{\mathrm{Fr}} x]$

246 $\vdash$ $[\forall x \in \mathrm{Fr}, \forall y \in \mathrm{Fr}, \forall z \in \mathrm{Fr} \mid x \approx_{\mathrm{Fr}} y \,\&\, y \approx_{\mathrm{Fr}} z \rightarrow x \approx_{\mathrm{Fr}} z]$

APPLY equivalence_classes$(P(x,y) \mapsto x \approx_{\mathrm{Fr}} y, s \mapsto \mathrm{Fr}) \Longrightarrow [\mathbb{Q}, \mathrm{Fr_to_}\mathbb{Q}]$

$[\forall x \in \mathrm{Fr} \mid \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x) \in \mathbb{Q}] \,\&\, [\forall x \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{arb}(x) \in \mathrm{Fr} \,\&\, \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathbf{arb}(x)) = x]$

$[\forall x \in \mathrm{Fr}, \forall y \in \mathrm{Fr} \mid x \approx_{\mathrm{Fr}} y \leftrightarrow \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x) = \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(y)]$

$[\forall x \in \mathrm{Fr} \mid x \approx_{\mathrm{Fr}} \mathbf{arb}(\mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x))]$

-- % The rational numbers and their properties

247 $\vdash$ $[\forall y \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{arb}(y) \in \mathrm{Fr} \,\&\, \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathbf{arb}(y)) = y] \,\&\, [\forall x \in \mathrm{Fr} \mid \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x) \in \mathbb{Q}]$
$\,\&\, [\forall x \in \mathrm{Fr}, \forall y \in \mathrm{Fr} \mid x \approx_{\mathrm{Fr}} y \leftrightarrow \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x) = \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(y)] \,\&\, [\forall x \in \mathrm{Fr} \mid x \approx_{\mathrm{Fr}} \mathbf{arb}(\mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(x))]$

37 $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{Q}} =_{\mathrm{Def}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\langle\emptyset, \emptyset\rangle, \langle 1, \emptyset\rangle\rangle)$

37a $\Rrightarrow$ $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} =_{\mathrm{Def}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\langle 1, \emptyset\rangle, \langle 1, \emptyset\rangle\rangle)$

-- Rational Sum

38 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}}$
$\mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(Y)) +_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(\mathbf{arb}(Y)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)), \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(Y))\rangle)$

-- Rational product

39 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(\mathbf{arb}(Y)), \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(Y))\rangle)$

-- Reciprocal

40 $\Rrightarrow$ $\mathrm{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)), \mathrm{car}(\mathbf{arb}(X))\rangle)$

-- Rational quotient

41 $\Rrightarrow$ $X /_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} X *_{\mathbb{Q}} \mathrm{Recip}_{\mathbb{Q}}(Y)$

-- Rational negative

42 $\Rrightarrow$ $\mathrm{Rev}_{\mathbb{Q}}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(\mathbf{arb}(X))), \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X))\rangle)$

-- Nonnegative Rational

43 $\Rrightarrow$ $\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)))$

-- Rational Subtraction

44 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} X +_{\mathbb{Q}} \mathrm{Rev}_{\mathbb{Q}}(Y)$

-- Rational Comparison

-- 45 $\Rrightarrow$ $X >_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X -_{\mathbb{Q}} Y) \,\&\, X \neq Y$

-- % Two utility theories giving properties of addition operators in ordered groups

THEORY Ordered_add(g, e, $\oplus$, $\ominus$, rvz, nneg)

$e \in g \,\&\, [\forall x \in g \mid x \oplus e = x \,\&\, x \oplus \mathrm{rvz}(x) = e \,\&\, \mathrm{rvz}(x) \in g]$

$[\forall x \in g, \forall y \in g \mid x \oplus y \in g \,\&\, x \oplus y = y \oplus x \,\&\, x \oplus \mathrm{rvz}(y) = x \ominus y]$

$[\forall x \in g, \forall y \in g, \forall z \in g \mid (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)]$

$[\forall x \in g, \forall y \in g \mid \mathrm{nneg}(x) \,\&\, \mathrm{nneg}(y) \rightarrow \mathrm{nneg}(x \oplus y)]$

$[\forall x \in g \mid (\mathrm{nneg}(x) \vee \mathrm{nneg}(\mathrm{rvz}(x))) \,\&\, (\mathrm{nneg}(x) \,\&\, \mathrm{nneg}(\mathrm{rvz}(x)) \rightarrow x = e)]$

$\Longrightarrow (\succcurlyeq_g, \preccurlyeq_g, \succ_g, \prec_g)$

-- Note that no theorems need to be proved since a decision algorithm is available

-- $\Rrightarrow X \succcurlyeq_g Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathrm{nneg}(X \oplus \mathrm{rvz}(Y))$

-- $\Rrightarrow X \preccurlyeq_g Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} Y \succcurlyeq_g X$

-- $\Rrightarrow X \succ_g Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} X \succcurlyeq_g Y \,\&\, X \neq Y$

-- $\Rrightarrow X \prec_g Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} Y \succ_g X$

$X \succcurlyeq_g Y \leftrightarrow \mathrm{nneg}(X \oplus \mathrm{rvz}(Y))$

$X \preccurlyeq_g Y \leftrightarrow Y \succcurlyeq_g X$

$X \succ_g Y \leftrightarrow X \succcurlyeq_g Y \,\&\, X \neq Y$

$X \prec_g Y \leftrightarrow Y \succ_g X$

END Ordered_add

-- % Various lemmas stating elementary properties of unsigned and signed integer arithmetic

248 $\vdash$ $(X \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \vee \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(X))) \,\&\, (\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(X)) \rightarrow X = \langle\emptyset, \emptyset\rangle)$

249 $\vdash$ $X \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(Y) \rightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X +_{\mathbb{Z}} Y) \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X *_{\mathbb{Z}} Y)$

APPLY Ordered_add($g \mapsto \mathbb{Z}, e \mapsto \langle\emptyset, \emptyset\rangle, \oplus \mapsto +_{\mathbb{Z}}, \mathrm{rvz} \mapsto \mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}, \mathrm{nneg} \mapsto \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}$) $\Longrightarrow [\geqslant_{\mathbb{Z}}, \leqslant_{\mathbb{Z}}, >_{\mathbb{Z}}, <_{\mathbb{Z}}]$

249a $\vdash$ $(X \geqslant_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow \mathrm{nneg}(X \oplus \mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(Y))) \,\&\, (X \leqslant_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow Y \geqslant_{\mathbb{Z}} X) \,\&\, (X >_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow X \geqslant_{\mathbb{Z}} Y \,\&\, X \neq Y)$
$\,\&\, (X <_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow Y >_{\mathbb{Z}} X)$

251 $\vdash$ $X \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, X \neq \langle\emptyset, \emptyset\rangle \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \rightarrow (\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X *_{\mathbb{Z}} Y) \leftrightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(Y))$

252 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \leftrightarrow X = \langle \mathrm{car}(X), \mathrm{cdr}(X)\rangle \,\&\, \mathrm{car}(X) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathrm{cdr}(X) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathrm{cdr}(X) \neq \langle\emptyset, \emptyset\rangle$

253 $\vdash$ $N \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{arb}(N) \in \mathrm{Fr} \,\&\, \mathbf{arb}(N) = \langle \mathrm{car}(\mathbf{arb}(N)), \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(N))\rangle \,\&\, \mathrm{car}(\mathbf{arb}(N)) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(N)) \in \mathbb{Z}$
$\,\&\, \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(N)) \neq \langle\emptyset, \emptyset\rangle$

254 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \,\&\, Y \in \mathrm{Fr} \,\&\, X \approx_{\mathrm{Fr}} Y \,\&\, W \in \mathrm{Fr} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathrm{Fr} \,\&\, W \approx_{\mathrm{Fr}} \mathbb{N}$
$\rightarrow \langle \mathrm{car}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(W) +_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(W) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(X), \mathrm{cdr}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(W)\rangle$
$\approx_{\mathrm{Fr}} \langle \mathrm{car}(Y) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbb{N}) +_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(\mathbb{N}) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(Y), \mathrm{cdr}(Y) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbb{N})\rangle$

255 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \,\&\, Y \in \mathrm{Fr} \,\&\, X \approx_{\mathrm{Fr}} Y \,\&\, W \in \mathrm{Fr} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathrm{Fr} \,\&\, W \approx_{\mathrm{Fr}} \mathbb{N}$
$\rightarrow \langle \mathrm{car}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(W), \mathrm{cdr}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(W)\rangle \approx_{\mathrm{Fr}} \langle \mathrm{car}(Y) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{car}(\mathbb{N}), \mathrm{cdr}(Y) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbb{N})\rangle$

-- % Elementary laws of rational arithmetic

256 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle\emptyset, \emptyset\rangle$
$\rightarrow X +_{\mathbb{Q}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N}\rangle) = \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} +_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N}\rangle)$

257 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle\emptyset, \emptyset\rangle$
$\rightarrow X *_{\mathbb{Q}} \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N}\rangle) = \mathrm{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathrm{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathrm{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N}\rangle)$

258 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \rightarrow X \approx_{\mathrm{Fr}} \langle \mathrm{Si\_Rev}(\mathrm{car}(X)), \mathrm{Si\_Rev}(\mathrm{cdr}(X))\rangle$

259 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \,\&\, Y \in \mathrm{Fr} \,\&\, X \approx_{\mathrm{Fr}} Y \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{cdr}(X)) \,\&\, \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{cdr}(Y))$
$\rightarrow (\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(X)) \vee \mathrm{car}(X) = \langle\emptyset, \emptyset\rangle \leftrightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(Y)) \vee \mathrm{car}(Y) = \langle\emptyset, \emptyset\rangle)$

261 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \,\&\, Y \in \mathrm{Fr} \,\&\, X \approx_{\mathrm{Fr}} Y \rightarrow (\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(X)) \leftrightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(Y) *_{\mathbb{Z}} \mathrm{cdr}(Y)))$

262 $\vdash$ $X \in \mathrm{Fr} \rightarrow (\mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \leftrightarrow \mathrm{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\langle \mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{car}(X)), \mathrm{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{cdr}(X))\rangle))$

-- Commutativity of Addition

264 ⊢ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N +_{\mathbb{Q}} M = M +_{\mathbb{Q}} N$

265 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle$
$\rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) +_{\mathbb{Q}} X = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} +_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

266 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle$
$\rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) +_{\mathbb{Q}} X = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} +_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

-- Commutativity of Multiplication

267 ⊢ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} M = M *_{\mathbb{Q}} N$

268 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) *_{\mathbb{Q}} X$
$= \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

269 ⊢ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N +_{\mathbb{Q}} (M +_{\mathbb{Q}} K) = N +_{\mathbb{Q}} M +_{\mathbb{Q}} K$

270 ⊢ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M = M +_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

271 ⊢ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M +_{\mathbb{Q}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

272 ⊢ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N = M +_{\mathbb{Q}} (N -_{\mathbb{Q}} M)$

273 ⊢ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} (M *_{\mathbb{Q}} K) = N *_{\mathbb{Q}} M *_{\mathbb{Q}} K$

274 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \,\&\, K \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \,\&\, M \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle N, M \rangle) = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle K *_{\mathbb{Z}} N, K *_{\mathbb{Z}} M \rangle)$

275 ⊢ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} (M +_{\mathbb{Q}} K) = N *_{\mathbb{Q}} M +_{\mathbb{Q}} N *_{\mathbb{Q}} K$

276 ⊢ $X \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow (\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle X, Y \rangle)) \leftrightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X *_{\mathbb{Z}} Y))$

277 ⊢ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M = M *_{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

278 ⊢ $M \in \mathbb{Q} \,\&\, M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(M) \in \mathbb{Q} \,\&\, M *_{\mathbb{Q}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

279 ⊢ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \,\&\, M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow N = M *_{\mathbb{Q}} N /_{\mathbb{Q}} M$

280 ⊢ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{0}_{\mathbb{Q}}) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})$

281 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \vee \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(X)) \,\&\, (\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(X)) \rightarrow X = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}})$

APPLY $\mathsf{Ordered\_add}(\mathsf{g} \mapsto \mathbb{Q}, \mathsf{e} \mapsto \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}, \oplus \mapsto +_{\mathbb{Q}}, \ominus \mapsto +_{\mathbb{Q}}, \mathsf{rvz} \mapsto \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}, \mathsf{nneg} \mapsto \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}})$
$\Longrightarrow [\geqslant_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}}, >_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}}]$

281a ⊢ $(X \geqslant_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow \mathsf{nneg}(X \oplus \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(Y))) \,\&\, (X \leqslant_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow Y \geqslant_{\mathbb{Q}} X) \,\&\, (X >_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow X \geqslant_{\mathbb{Q}} Y \,\&\, X \neq Y)$
$\&\, (X <_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow Y >_{\mathbb{Q}} X)$

282 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow X = X *_{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

283 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow (X = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \leftrightarrow \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) = \langle \emptyset, \emptyset \rangle)$

284 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(Y) \rightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X +_{\mathbb{Q}} Y) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X *_{\mathbb{Q}} Y)$

291 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, \mathsf{X1} \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} Y \,\&\, \mathsf{X1} >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow X *_{\mathbb{Q}} \mathsf{X1} >_{\mathbb{Q}} Y *_{\mathbb{Q}} \mathsf{X1}$

292 ⊢ $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

293 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

294 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} Y \rightarrow X >_{\mathbb{Q}} (X +_{\mathbb{Q}} Y) /_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) \,\&\, (X +_{\mathbb{Q}} Y) /_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) >_{\mathbb{Q}} Y$

-- % The Real numbers

46 ⇛ $\mathbb{R} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{s} : \mathsf{s} \subseteq \mathbb{Q} \mid (\mathsf{s} \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{s} \neq \mathbb{Q} \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \exists \mathsf{y} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{y} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}] \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathbb{Q} \mid \mathsf{x} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{y} \in \mathsf{s}])\}$

-- Real 0 and 1

47 ⇛ $\mathbf{0}_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}\}$

-- Real 0 and 1

47a ⇛ $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}\}$

-- Real Sum

48 ⇛ $X +_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{u} +_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} : \mathsf{u} \in X, \mathsf{v} \in Y\}$

-- Real Negative

49 ⇛ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{u}) +_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} : \mathsf{u} \in \mathbb{Q} \backslash X, \mathsf{v} \in \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\}$

-- Real Subtraction

50 ⇛ $X -_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} X +_{\mathbb{R}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(Y)$

-- Absolute value, i.e. the larger of X and $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X)$

51 ⇛ $|X|_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} X \cup \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X)$

-- Real Multiplication of Absolute Values

52 ⇛ $X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{u} *_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} : \mathsf{u} \in |X|_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{v} \in |Y|_{\mathbb{R}} \mid \neg(\mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{u} \vee \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{v})\} \cup \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

-- Real Multiplication

53 ⇛ $X *_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \textbf{if } X \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \leftrightarrow Y \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ then } X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y \textbf{ else } \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y) \textbf{ fi}$

-- Real Absolute Reciprocal

54 ⇛ $\mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}} \bigcup\{\mathsf{y} : \mathsf{y} \in \mathbb{R} \mid |X|_{\mathbb{R}} *_{\mathbb{R}} \mathsf{y} \subseteq \{\mathsf{r} \in \mathbb{Q} \mid \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle 1,1\rangle) >_{\mathbb{Q}} \mathsf{r}\}\}$

-- Real Reciprocal

55 ⇛ $\mathsf{Recip}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}}$ **if** $X \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ **then** $\mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X)$ **else** $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X))$ **fi**

-- Real Quotient

56 ⇛ $X /_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} X *_{\mathbb{R}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{R}}(Y)$

-- Non-negative Real

56*a* ⇛ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \subseteq X$

-- Real Comparison

56*b* ⇛ $X >_{\mathbb{R}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X -_{\mathbb{R}} Y) \,\&\, \neg X = Y$

-- Real Comparison

56*c* ⇛ $X \geqslant_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X -_{\mathbb{R}} Y)$

-- Real square root

57 ⇛ $\sqrt{X} =_{\mathrm{Def}} \bigcup\{\mathsf{y} : \mathsf{y} \in \mathbb{R} \mid \mathsf{y} *_{\mathbb{R}} \mathsf{y} \subseteq X\}$

-- % Elementary laws of real arithmetic

295 ⊢ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow \{\mathsf{y} : \mathsf{y} \in \mathbb{Q} \mid X >_{\mathbb{Q}} \mathsf{y}\} \in \mathbb{R}$

296 ⊢ $\mathbf{0}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}}) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \,\&\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

297 ⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow N \subseteq \mathbb{Q}$

298 ⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow [\exists \mathsf{m} \in \mathbb{Q}, \forall \mathsf{x} \in N \mid \mathsf{m} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}]$

299 ⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} M \in \mathbb{R}$

300 ⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} M = M +_{\mathbb{R}} N$

301 ⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow N = N +_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

302 ⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N) \in \mathbb{R}$

⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \,\&\, M \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(M)$
$\rightarrow [\exists \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(N -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} M) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}((\mathsf{k} +_{\mathbb{Z}} \langle 1, \emptyset \rangle) *_{\mathbb{Z}} M) -_{\mathbb{Z}} N]$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N \subseteq M \vee M \subseteq N$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N \cup M \in \mathbb{R}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \,\&\, N \subseteq |N|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N = M +_{\mathbb{R}} (N -_{\mathbb{R}} M)$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, M = M \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, N$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N *_{\mathbb{R}} M = M *_{\mathbb{R}} N$

⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} =$ **if** $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(N)$ **then** N **else** $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N)$ **fi**

⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \,\&\, |N|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} N \vee |N|_{\mathbb{R}} = N \,\&\, |N|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(|N|_{\mathbb{R}})$

⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} = |\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}}(N)$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M)) \rightarrow N >_{\mathbb{R}} N +_{\mathbb{R}} M \vee N = N +_{\mathbb{R}} M$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(N) \,\&\, \neg \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(M) \rightarrow N >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee N = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$
$\vee\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M) >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M) = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathsf{n} \vee \mathsf{n} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = \mathsf{n}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |N -_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N -_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} *_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N *_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \,\&\, M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} /_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N /_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \,\&\, M \in \mathbb{R} \rightarrow N \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, M \in \mathbb{R}$

⊢ $N \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N)) = N$

⊢ $K \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{n} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{m} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{n} *_{\mathbb{R}} (\mathsf{m} *_{\mathbb{R}} K) = \mathsf{n} *_{\mathbb{R}} \mathsf{m} *_{\mathbb{R}} K$

⊢ $X \in \mathbb{R} \,\&\, Y \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{X1} \in \mathbb{R} \,\&\, X >_{\mathbb{R}} Y \,\&\, \mathsf{X1} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow X *_{\mathbb{R}} \mathsf{X1} >_{\mathbb{R}} Y *_{\mathbb{R}} \mathsf{X1}$

⊢ $X \in \mathbb{R} \,\&\, X >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

⊢ $X \in \mathbb{R} \,\&\, Y \in \mathbb{R} \,\&\, X >_{\mathbb{R}} Y \rightarrow X >_{\mathbb{R}} (X +_{\mathbb{R}} Y) /_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \,\&\, (X +_{\mathbb{R}} Y) /_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) >_{\mathbb{R}} Y$

-- % The Least Upper Bound principle for real numbers

⊢ $S \neq \emptyset \,\&\, S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \bigcup S \in \mathbb{R} \vee \bigcup S = \mathbb{Q}$

⊢ $X \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \sqrt{X} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\sqrt{X}) \,\&\, \sqrt{X} *_{\mathbb{R}} \sqrt{X} = X$

⊢ $X \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X) \,\&\, Y \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(Y) \rightarrow \sqrt{X *_{\mathbb{R}} Y} = \sqrt{X} *_{\mathbb{R}} \sqrt{Y}$

-- % Complex Numbers

58 $\Rrightarrow$ $\mathbb{C} =_{\text{Def}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

-- Complex Sum

59 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y), \mathsf{cdr}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y)\rangle$

-- Complex Product

60 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y) -_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y), \mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y)\rangle$

-- Complex Norm

61 $\Rrightarrow$ $|X|_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \sqrt{\mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X)}$

-- Complex reciprocal

62 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(X) =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) /_{\mathbb{R}} (|X|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X|_{\mathbb{C}}), \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{cdr}(X) /_{\mathbb{R}} (|X|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X|_{\mathbb{C}}))\rangle$

-- Complex Quotient

63 $\Rrightarrow$ $X /_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} X *_{\mathbb{C}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(Y)$

63*a* $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(X) =_{\text{Def}} \langle \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{car}(X)), \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{cdr}(X))\rangle$

63*b* $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} X +_{\mathbb{C}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(Y)$

63*x* $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle$

63*y* $\Rrightarrow$ $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle$

$\vdash$ $(X \in \mathbb{R} \,\&\, Y \in \mathbb{R} \rightarrow \langle X, Y\rangle \in \mathbb{C}) \,\&\, (M \in \mathbb{C} \rightarrow M{=}\langle \mathsf{car}(M), \mathsf{cdr}(M)\rangle \,\&\, \mathsf{car}(M) \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{cdr}(M) \in \mathbb{R})$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} M \in \mathbb{C}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} M{=}M +_{\mathbb{C}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow N{=}N +_{\mathbb{C}} \mathbf{0}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N) \in \mathbb{C} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N)){=}N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N){=}\mathbf{0}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N{=}M +_{\mathbb{C}} (N -_{\mathbb{C}} M)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} M{=}M *_{\mathbb{C}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(|N|_{\mathbb{C}})$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}}{=}|\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{C}}(N)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}} \vee |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}} \vee |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N -_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N *_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} /_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N /_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} M \in \mathbb{C}$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} (M +_{\mathbb{C}} K){=}(N +_{\mathbb{C}} M) +_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} (M *_{\mathbb{C}} K){=}(N *_{\mathbb{C}} M) *_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} (M +_{\mathbb{C}} K){=}N *_{\mathbb{C}} M +_{\mathbb{C}} N *_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $M \in \mathbb{C} \rightarrow M{=}M *_{\mathbb{C}} \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(M) \in \mathbb{C} \,\&\, M *_{\mathbb{C}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(M){=}\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow N{=}M *_{\mathbb{C}} (N /_{\mathbb{C}} M)$

$\vdash$ $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C} \,\&\, \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$

-- % Sequences of real numbers

-- Sums for Real Maps with finite domains

APPLY $\mathsf{sigma\_theory}(\mathsf{s} \mapsto \mathbb{R}, \oplus \mapsto +_{\mathbb{R}}, \mathsf{e} \mapsto \mathbf{0}_{\mathbb{R}}) \Longrightarrow [\sum_{\mathbb{R}}]$

64 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f}){\subseteq}\mathbb{R} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{f}) \rightarrow \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}) \in \mathbb{R} \,\&\, (\mathsf{p} \in \mathsf{f} \rightarrow \sum_{\mathbb{R}}(\{\mathsf{p}\}){=}\mathsf{f}(\mathsf{cdr}(\mathsf{p})))$
$\&\, [\forall \mathsf{a} \,|\, \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}){=}\sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{f})\cap\mathsf{a}}) +_{\mathbb{R}} \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{f})\setminus\mathsf{a}})]$

-- Sums of absolutely convergent infinite series

64*b* $\Rrightarrow$ $\sum_{\mathbb{R}}^{\infty}(X) =_{\text{Def}} \bigcup\{\sum_{\mathbb{R}}(X_{|\mathsf{s}}) : \mathsf{s}{\subseteq}\mathbf{domain}(X) \,|\, \mathsf{Finite}(\mathsf{s})\}$

-- % Real functions of a real variable

65 $\Rrightarrow$ $\mathbb{F} =_{\text{Def}} \{f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \mathsf{Svm}(f) \,\&\, \mathbf{domain}(f) = \mathbb{R}\}$

-- Sum of Real Functions

66 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{F}} Y =_{\text{Def}} \{\langle x, X \upharpoonright x +_{\mathbb{R}} Y \upharpoonright x \rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- Product of Real Functions

67 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{F}} Y =_{\text{Def}} \{\langle x, X \upharpoonright x *_{\mathbb{R}} Y \upharpoonright x \rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- LUB of a set of Real Functions

68 $\Rrightarrow$ $\mathsf{LUB}(X) =_{\text{Def}} \{\langle x, \bigcup\{f \upharpoonright x : f \in X\}\rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- Constant zero function

69 $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{F}} =_{\text{Def}} \{\langle x, \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rangle : x \in \mathbb{R}\}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} M = M +_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} M = M +_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} M = M *_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $K \in \mathbb{F} \,\&\, N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} (M +_{\mathbb{F}} K) = (N +_{\mathbb{F}} M) +_{\mathbb{F}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{F} \,\&\, N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} (M *_{\mathbb{F}} K) = (N *_{\mathbb{F}} M) *_{\mathbb{F}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{F} \,\&\, N \in \mathbb{F} \,\&\, M \in \mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} (M +_{\mathbb{F}} K) = N *_{\mathbb{F}} M +_{\mathbb{F}} N *_{\mathbb{F}} K$

-- Sums of finite and infinite series of real functions

APPLY $\mathsf{sigma\_theory}(s \mapsto \mathbb{F}, \oplus \mapsto +_{\mathbb{F}}, e \mapsto \mathbf{0}_{\mathbb{F}}) \Longrightarrow [\sum_{\mathbb{F}}]$

70 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Svm}(\mathsf{ser}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{ser}) \subseteq \mathbb{F} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{ser}) \rightarrow \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}) \in \mathbb{F} \,\&\, (p \in \mathsf{ser} \rightarrow \sum_{\mathbb{F}}(\{p\}) = \mathsf{ser}(\mathsf{cdr}(p)))$
$\&\, [\forall a \mid \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}) = \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{ser}) \cap a}) +_{\mathbb{F}} \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{ser}) \setminus a})]$

-- Sums of absolutely convergent infinite series of real functions

71 $\Rrightarrow$ $\sum_{\mathbb{F}}^{\infty}(X) =_{\text{Def}} \mathsf{LUB}(\{\sum_{\mathbb{R}}(X_{|s}) : s \subseteq \mathbf{domain}(X) \mid \mathsf{Finite}(s)\})$

-- Product of a nonempty family of sets;
-- Note: this is also the real greatest lower bound

72 $\Rrightarrow$ $\mathsf{GLB}(X) =_{\text{Def}} \{x \in \mathbf{arb}(X) \mid [\forall y \in X \mid x \in y]\}$

-- Block function

73 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Bl\_f}(X, Y, U) =_{\text{Def}} \{\langle x, \textbf{if } X \subseteq x \,\&\, x \subseteq Y \textbf{ then } U \textbf{ else } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ fi} \rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- Block function integral

74 $\Rrightarrow$ $\mathsf{BFInt}(X) =_{\text{Def}} \mathbf{arb}(\{c *_{\mathbb{R}} (b -_{\mathbb{R}} a) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \mid \mathsf{Bl\_f}(a, b, c) = X\})$

-- Block functions

75 $\Rrightarrow$ $\mathsf{RBF} =_{\text{Def}} \{\mathsf{Bl\_f}(a, b, c) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$

-- Comparison of real functions

76 $\Rrightarrow$ $X >_{\mathbb{F}} Y \leftrightarrow_{\text{Def}} X \neq Y \,\&\, [\forall x \in \mathbb{R} \mid X \upharpoonright x \supseteq Y \upharpoonright x]$

-- Lebesgue Upper Integral of a Positive Function

77 $\Rrightarrow$ $\int^{+} X =_{\text{Def}}$
$\mathsf{GLB}(\{\{\langle n, \mathsf{BFInt}(\mathsf{ser} \upharpoonright n)\rangle : n \in \mathbb{N}\} : \mathsf{ser} \subseteq \mathbb{N} \times \mathsf{RBF} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{ser}) \,\&\, \sum_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathsf{ser}) >_{\mathbb{F}} X\})$

-- Positive Part of real function

78 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Pos\_part}(X) =_{\text{Def}} \{\langle x, \textbf{if } X \upharpoonright x \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ then } X \upharpoonright x \textbf{ else } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ fi} \rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- Reverse of a real function

79 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{F}}(X) =_{\text{Def}} \{\langle x, \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X \upharpoonright x)\rangle : x \in \mathbb{R}\}$

-- Lebesgue Integral

81 $\Rrightarrow$ $\int X =_{\text{Def}} \int^{+} \mathsf{Pos\_part}(X) -_{\mathbb{R}} \int^{+} \mathsf{Pos\_part}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{F}}(X))$

-- Continuous function of a real variable

82 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{F}}(X) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\&\; \mathsf{Svm}(X) \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \;\&\; \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \;\&\; \delta \supseteq |\mathsf{x} -_{\mathbb{R}} \mathsf{y}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X \restriction \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} X \restriction \mathsf{y}|_{\mathbb{R}}]$

-- Euclidean n-space

83 $\Rrightarrow$ $E(X) \quad =_{\text{Def}} \quad \{\mathsf{f} \subseteq X \times \mathbb{R} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \;\&\; \mathbf{domain}(\mathsf{f}) = X\}$

-- Euclidean norm

84 $\Rrightarrow$ $\|X\|_{\mathbb{R}} \quad =_{\text{Def}} \quad \sqrt{\sum_{\mathbb{R}}}(X)$

-- Difference of Real Functions

85 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{F}} Y \quad =_{\text{Def}} \quad \{\langle \mathsf{x}, X \restriction \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} Y \restriction \mathsf{x} \rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X)\}$

-- Continuous function on Euclidean n-space

86 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_REnF}(X, Y) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad X \subseteq E(Y) \times \mathbb{R} \;\&\; \mathsf{Svm}(X) \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \;\&\; \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \;\&\; \delta \supseteq \|\mathsf{x} -_{\mathbb{F}} \mathsf{y}\|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X \restriction \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} X \restriction \mathsf{y}|_{\mathbb{R}}]$

-- % Basic definitional principles of complex analysis

-- Difference-and-diagonal trick

87 $\Rrightarrow$ $\mathsf{DD}(X,Y) =_{\mathrm{Def}}$
$\{\textbf{if } \mathsf{x}\upharpoonright\emptyset\neq\mathsf{x}\upharpoonright 1 \textbf{ then } (X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) -_{\mathbb{R}} X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright 1)) /_{\mathbb{R}} (\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset -_{\mathbb{R}} \mathsf{x}\upharpoonright 1) \textbf{ else } Y\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x}\in E(2)\}$

-- Derivative of function of a real variable

88 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Der}(X) =_{\mathrm{Def}}$ $\mathbf{arb}\left(\{\mathsf{df}\in\mathbb{F} \mid \mathbf{domain}(X)=\mathbf{domain}(\mathsf{df})\right.$
$\left.\&\ \mathsf{is\_continuous\_REnF}(\mathsf{DD}(X,\mathsf{df})_{|\mathbf{domain}(X)\times\mathbf{domain}(X)},2)\}\right)$

-- Complex functions of a complex variable

89 $\Rrightarrow$ $\mathbb{CF} =_{\mathrm{Def}}$ $\{\mathsf{f}\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\mathbb{C}\}$

-- Complex Euclidean n-space

90 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CE}(X) =_{\mathrm{Def}}$ $\{\mathsf{f}\subseteq X\times\mathbb{C} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=X\}$

-- Complex Euclidean norm

91 $\Rrightarrow$ $\|X\|_{\mathbb{C}} =_{\mathrm{Def}}$ $\sqrt{\textstyle\sum_{\mathbb{R}}}(\{\langle\mathsf{m}, |X\upharpoonright\mathsf{m}|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X\upharpoonright\mathsf{m}|_{\mathbb{C}}\rangle : \mathsf{m}\in\mathbf{domain}(X)\})$

-- Difference of Complex Functions

92 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{CF}} Y =_{\mathrm{Def}}$ $\{\langle\mathsf{x}, X\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} Y\upharpoonright\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{C}\}$

-- Continuous function of a complex variable

93 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $X\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C}\ \&\ \mathsf{Svm}(X)\ \&\ [\forall\mathsf{x}\in\mathbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R},$
$\forall\mathsf{y}\in\mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \delta\supseteq|\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{y}|_{\mathbb{C}} \rightarrow \varepsilon\supseteq|X\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} X\upharpoonright\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Continuous function on Complex Euclidean n-space

94 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CEnF}(X,Y) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $X\subseteq\mathsf{CE}(Y)\times\mathsf{CE}(Y)\ \&\ \mathsf{Svm}(X)\ \&\ [\forall\mathsf{x}\in\mathbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R},$
$\forall\mathsf{y}\in\mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \delta\supseteq|\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} \mathsf{y}|_{\mathbb{C}} \rightarrow \varepsilon\supseteq|X\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} X\upharpoonright\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Difference-and-diagonal trick, complex case

95 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CDD}(X,Y) =_{\mathrm{Def}}$
$\{\textbf{if } \mathsf{x}\upharpoonright\emptyset\neq\mathsf{x}\upharpoonright 1 \textbf{ then } (X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) -_{\mathbb{C}} X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright 1)) /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset -_{\mathbb{C}} \mathsf{x}\upharpoonright 1) \textbf{ else } Y\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x}\in\mathsf{CE}(2)\}$

-- Derivative of function of a complex variable

96 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CDer}(X) =_{\mathrm{Def}}$ $\mathbf{arb}\left(\{\mathsf{df}\in\mathbb{CF} \mid \mathbf{domain}(X)=\mathbf{domain}(\mathsf{df})\right.$
$\left.\&\ \mathsf{is\_continuous\_CEnF}(\mathsf{CDD}(X,\mathsf{df})_{|\mathbf{domain}(X)\times\mathbf{domain}(X)},2)\}\right)$

-- Open set in the complex plane

97 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_open\_C\_set}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $X\subseteq\mathbb{C}$
$\&\ \mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(\{\langle\mathsf{z}, \textbf{if } \mathsf{z}\in X \textbf{ then } \langle\mathbf{0}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \textbf{ else } \langle\mathbf{1}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{z}\in\mathbb{C}\})$

-- Analytic function of a complex variable

98 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $\mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(X)\ \&\ \mathsf{is\_open\_C\_set}(\mathbf{domain}(X))\ \&\ \mathsf{CDer}(X)\neq\emptyset$

-- Complex exponential function

99 $\Rrightarrow$ $\mathsf{C\_exp\_fcn} =_{\mathrm{Def}}$ $\mathbf{arb}(\{\mathsf{f}\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C} : \mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f})\ \&\ \mathsf{CDer}(\mathsf{f})=\mathsf{f}\ \&\ \mathsf{f}\upharpoonright\langle\mathbf{0}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle=\langle\mathbf{1}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle\})$

-- The constant π

100 $\Rrightarrow$ $\pi =_{\mathrm{Def}}$ $\mathbf{arb}\left(\{\mathsf{x}\in\mathbb{R} \mid \mathsf{x} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle\mathbf{0}_{\mathbb{R}},\mathsf{x}\rangle)=\langle\mathbf{1}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle\right.$
$\left.\&\ [\forall\mathsf{y}\in\mathbb{R} \mid \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle\mathbf{0}_{\mathbb{R}},\mathsf{y}\rangle)=\langle\mathbf{1}_{\mathbb{R}},\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \rightarrow \mathsf{y}=\mathsf{x} \vee \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\supseteq\mathsf{y}]\}\right)$

-- Continuous complex function on the reals

101 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CoRF}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $X\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ \&\ \mathsf{Svm}(X)\ \&\ [\forall\mathsf{x}\in\mathbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R},$
$\forall\mathsf{y}\in\mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \delta\supseteq|\mathsf{x} -_{\mathbb{R}} \mathsf{y}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon\supseteq\|X\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} X\upharpoonright\mathsf{y}\|_{\mathbb{R}}]$

-- Difference-and-diagonal trick, real-to-complex case

102 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CRDD}(X,Y) =_{\mathrm{Def}}$
$\{\textbf{if } \mathsf{x}\upharpoonright\emptyset\neq\mathsf{x}\upharpoonright 1 \textbf{ then } (X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) -_{\mathbb{C}} X\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright 1)) /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset -_{\mathbb{C}} \mathsf{x}\upharpoonright 1) \textbf{ else } Y\upharpoonright(\mathsf{x}\upharpoonright\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x}\in E(2)\}$

-- Continuous complex function on $E(n)$

103 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CREnF}(X,Y) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $X\subseteq E(Y)\times\mathbb{C}\ \&\ \mathsf{Svm}(X)\ \&\ [\forall\mathsf{x}\in\mathbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R},$
$\forall\mathsf{y}\in\mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \delta\supseteq\|\mathsf{x} -_{\mathbb{F}} \mathsf{y}\|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon\supseteq|X\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} X\upharpoonright\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Derivative of complex function of a real variable

104 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CRDer}(X) =_{\mathrm{Def}}$ $\mathbf{arb}\left(\{\mathsf{df}\in\mathbb{CF} \mid \mathbf{domain}(X)=\mathbf{domain}(\mathsf{df})\right.$
$\left.\&\ \mathsf{is\_continuous\_CREnF}(\mathsf{CRDD}(X,\mathsf{df})_{|\mathbf{domain}(X)\times\mathbf{domain}(X)},2)\}\right)$

-- Real Interval

105 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Interval}(X,Y) =_{\mathrm{Def}}$ $\{\mathsf{x}\in\mathbb{R} \mid X\subseteq\mathsf{x}\ \&\ \mathsf{x}\subseteq Y\}$

-- Continuously differentiable curve in the complex plane

106 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_CD\_curv}(X,Y,U) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}$ $\mathsf{is\_continuous\_CoRF}(X)\ \&\ \mathbf{domain}(X)=\mathsf{Interval}(Y,U)$
$\&\ \emptyset\neq\mathsf{CRDer}(X)\ \&\ \mathsf{is\_continuous\_CoRF}(\mathsf{CRDer}(X))$

-- % Complex line integrals and the Cauchy Integral Formula

107 $\Rrightarrow$ $\oint_U^V(X,Y) =_{\text{Def}}$

$\langle\int\{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } \mathsf{x} \notin \mathsf{Interval}(U,V) \textbf{ then } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ else } \mathsf{car}(X\upharpoonright(\mathsf{curv}\upharpoonright\mathsf{x}) *_{\mathbb{C}} \mathsf{CRDer}(Y)\upharpoonright\mathsf{x}) \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\},$

$\int\{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } \mathsf{x} \notin \mathsf{Interval}(U,V) \textbf{ then } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ else } \mathsf{cdr}(X\upharpoonright(\mathsf{curv}\upharpoonright\mathsf{x}) *_{\mathbb{C}} \mathsf{CRDer}(Y)\upharpoonright\mathsf{x}) \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\}\rangle$

-- Cauchy integral theorem

$\vdash$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f}) \rightarrow [\exists\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, [\forall \mathsf{crv1}, \forall \mathsf{crv2} \mid \mathsf{is\_CD\_curv}(\mathsf{crv1}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \,\&\, \mathsf{is\_CD\_curv}(\mathsf{crv1}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}})$
$\&\, \mathsf{crv1}\upharpoonright\mathbf{0}_{\mathbb{R}} = \mathsf{crv1}\upharpoonright\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{crv2}\upharpoonright\mathbf{0}_{\mathbb{R}} = \mathsf{crv2}\upharpoonright\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Interval}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \mid \varepsilon \supseteq |\mathsf{crv1}\upharpoonright\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{crv2}\upharpoonright\mathsf{x}|_{\mathbb{C}}]$
$\rightarrow \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}}(\mathsf{f}, \mathsf{crv1}) = \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}}(\mathsf{f}, \mathsf{crv2})]]$

-- Cauchy integral formula

$\vdash$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \supseteq \{\mathsf{z} \in \mathbb{C} : \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \geqslant_{\mathbb{R}} |\mathsf{z}|_{\mathbb{C}}\} \rightarrow [\forall \mathsf{z} \in \mathbb{C} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |\mathsf{z}|_{\mathbb{C}}$
$\rightarrow \mathsf{f}\upharpoonright\mathsf{z} = \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\pi +_{\mathbb{R}} \pi}(\{\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}\upharpoonright\mathsf{x} /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{z})\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{C}\backslash\{\mathsf{z}\}\}, \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathsf{x}\rangle)\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\}) /_{\mathbb{C}} \langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \pi +_{\mathbb{R}} \pi\rangle]$