-- % Some elementary definitions: ordered pair and component extraction

-- Ordered pair

1 $\Rrightarrow$ $\langle X, Y\rangle \;=_{\text{Def}}\; \{\{X\}, \{\{X\}, \{\{Y\}, Y\}\}\}$

1 $\vdash$ $\mathbf{arb}(\{X\}) = X$

$1a$ $\vdash$ $\mathbf{arb}(\{\{X\}, X\}) = X$

2 $\vdash$ $\mathbf{arb}(\langle X, Y\rangle) = \{X\}$

3 $\vdash$ $\mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}(\langle X, Y\rangle)) = X$

4 $\vdash$ $\mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}\,(\langle X, Y\rangle \backslash \{\mathbf{arb}(\langle X, Y\rangle)\}) \backslash \{\mathbf{arb}(\langle X, Y\rangle)\})) = Y$

2 $\Rrightarrow$ $\mathsf{car}(P) \;=_{\text{Def}}\; \mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}(P))$

3 $\Rrightarrow$ $\mathsf{cdr}(P) \;=_{\text{Def}}\; \mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}\,(\mathbf{arb}\,(P \backslash \{\mathbf{arb}(P)\}) \backslash \{\mathbf{arb}(P)\}))$

5 $\vdash$ $\mathsf{car}(\langle X, Y\rangle) = X$

6 $\vdash$ $\mathsf{cdr}(\langle X, Y\rangle) = Y$

-- Ordered pair Property

7 $\vdash$ $\langle X, Y\rangle = \langle \mathsf{car}(\langle X, Y\rangle), \mathsf{cdr}(\langle X, Y\rangle)\rangle$

-- % Some utility theorems giving elementary properties of setformers

THEORY setformer(e, ep1, s, p, pp1)

-- Elementary properties of setformers

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{e}(\mathsf{x}) = \mathsf{ep1}(\mathsf{x})] \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{p}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \mathsf{pp1}(\mathsf{x})]$

$\Longrightarrow$

$\vdash$ $\{\mathsf{e}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{p}(\mathsf{x})\} = \{\mathsf{ep1}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{pp1}(\mathsf{x})\}$

END setformer

THEORY setformer0(e, s, p)

-- Elementary properties of setformers

$\Longrightarrow$

$\vdash$ $\mathsf{s} \neq \emptyset \rightarrow \{\mathsf{e}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s}\} \neq \emptyset$

$\vdash$ $\{\mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid P(\mathsf{x})\} \neq \emptyset \rightarrow \{\mathsf{e}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid P(\mathsf{x})\} \neq \emptyset$

END setformer0

THEORY setformer2(e, ep2, f, fp, s, p, pp2)

-- More elementary properties of setformers

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{fp}(\mathsf{x})] \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mid \mathsf{e}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \mathsf{ep2}(\mathsf{x}, \mathsf{y})] \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mid \mathsf{p}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \leftrightarrow \mathsf{pp2}(\mathsf{x}, \mathsf{y})]$

$\Longrightarrow$

$\vdash$ $\{\mathsf{e}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s},\ \mathsf{y} \in \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mid \mathsf{p}(\mathsf{x}, \mathsf{y})\} = \{\mathsf{ep2}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s},\ \mathsf{y} \in \mathsf{fp}(\mathsf{x}) \mid \mathsf{pp2}(\mathsf{x}, \mathsf{y})\}$

END setformer2

-- % A first version of the principle of transfinite induction

THEORY transfinite_induction(n, P)

$P(\mathsf{n})$

$\Longrightarrow$ (m)

transfinite_induction · 1 $\vdash$ $\neg[\forall \mathsf{m} \mid P(\mathsf{m}) \rightarrow [\exists \mathsf{k} \in \mathsf{m} \mid P(\mathsf{k})]]$

transfinite_induction · 2 $\vdash$ $P(\mathsf{m}) \;\&\; [\forall \mathsf{k} \in \mathsf{m} \mid \neg P(\mathsf{k})]$

END transfinite_induction

-- % Some elementary set-theoretic definitions: maps, domain, range, etc.

4 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_map}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} X=\{\langle \mathsf{car}(\mathsf{x}), \mathsf{cdr}(\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x} \in X\}$

5 $\Rrightarrow$ $\mathbf{domain}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{car}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in X\}$

6 $\Rrightarrow$ $\mathbf{range}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{cdr}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in X\}$

7 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Svm}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_map}(X)\ \&\ [\forall \mathsf{x} \in X, \forall \mathsf{y} \in X \mid \mathsf{car}(\mathsf{x})=\mathsf{car}(\mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{x}=\mathsf{y}]$

8 $\Rrightarrow$ $\mathsf{1\text{–}1}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{Svm}(X)\ \&\ [\forall \mathsf{x} \in X, \forall \mathsf{y} \in X \mid \mathsf{cdr}(\mathsf{x})=\mathsf{cdr}(\mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{x}=\mathsf{y}]$

-- % The enumeration of a set

9 $\Rrightarrow$ $\mathsf{enum}(X,Y) =_{\mathrm{Def}}$ $\textbf{if } Y\subseteq\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},Y) : \mathsf{y} \in X\} \textbf{ then } Y \textbf{ else } \mathbf{arb}\,(Y\setminus\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},Y) : \mathsf{y} \in X\}) \textbf{ fi}$

-- % Ordinals and their properties

10 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Ord}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} [\forall \mathsf{x} \in X \mid \mathsf{x}\subseteq X]\ \&\ [\forall \mathsf{x} \in X, \forall \mathsf{y} \in X \mid \mathsf{x} \in \mathsf{y} \vee \mathsf{y} \in \mathsf{x} \vee \mathsf{x}=\mathsf{y}]$

-- Successor operation

11 $\Rrightarrow$ $\mathsf{next}(X) =_{\mathrm{Def}} X\cup\{X\}$

8 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T)\ \&\ T\subseteq S \rightarrow T=S \vee T=\mathbf{arb}\,(S\setminus T)$

9 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T) \rightarrow \mathsf{Ord}(S\cap T)$

10 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T) \rightarrow S\subseteq T \vee T\subseteq S$

11 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T) \rightarrow S \in T \vee T \in S \vee S=T$

12 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \in S \rightarrow \mathsf{Ord}(T)$

-- The class of all sets is not a set

13 $\vdash$ $\neg[\exists \mathsf{x}, \forall \mathsf{y} \mid \mathsf{y} \in \mathsf{x}]$

-- The class of ordinals is not a set

14 $\vdash$ $\neg[\exists \mathsf{ordinals}, \forall \mathsf{x} \mid \mathsf{x} \in \mathsf{ordinals} \leftrightarrow \mathsf{Ord}(\mathsf{x})]$

15 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S) \rightarrow \mathsf{Ord}(\mathsf{next}(S))$

16 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T) \rightarrow (T\subseteq S \leftrightarrow T \in S \vee T=S)$

17 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(X)\ \&\ S \in \{\mathsf{enum}(\mathsf{y},S) : \mathsf{y} \in X\} \rightarrow S\subseteq\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},S) : \mathsf{y} \in X\}$

18 $\vdash$ $\mathsf{enum}(X,S)=S \vee \mathsf{enum}(X,S) \in S$

19 $\vdash$ $\mathsf{enum}(X,S)=S\ \&\ Y\supseteq X \rightarrow \mathsf{enum}(Y,S)=S$

-- The enumeration of a set is 1-1

20 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(X)\ \&\ \mathsf{Ord}(W)\ \&\ X\neq W \rightarrow S \in \{\mathsf{enum}(\mathsf{y},S) : \mathsf{y} \in X\}$
$\vee\ S \in \{\mathsf{enum}(\mathsf{y},S) : \mathsf{y} \in W\} \vee \mathsf{enum}(X,S)\neq\mathsf{enum}(W,S)$

-- Enumeration Lemma

21 $\vdash$ $[\forall \mathsf{s}, \exists \mathsf{x} \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{x})\ \&\ \mathsf{s} \in \{\mathsf{enum}(\mathsf{y},\mathsf{s}) : \mathsf{y} \in \mathsf{x}\}]$

-- Enumeration theorem

22 $\vdash$ $[\forall \mathsf{s}, \exists \mathsf{x} \mid (\mathsf{Ord}(\mathsf{x})\ \&\ \mathsf{s}=\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},\mathsf{s}) : \mathsf{y} \in \mathsf{x}\})\ \&\ [\forall \mathsf{y} \in \mathsf{x}, \forall \mathsf{z} \in \mathsf{x} \mid \mathsf{y}\neq\mathsf{z} \rightarrow \mathsf{enum}(\mathsf{y},\mathsf{s})\neq\mathsf{enum}(\mathsf{z},\mathsf{s})]]$

-- % More elementary set-theoretic definitions: map restrictions, values, inverse map, etc.

-- Map Restriction

12 $\Rrightarrow$ $X_{|Y} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{p} \in X \mid \mathsf{car}(\mathsf{p}) \in Y\}$

-- Value of single-valued function

13 $\Rrightarrow$ $X\restriction Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X_{|\{Y\}}))$

-- Map Product

14 $\Rrightarrow$ $X\circ Y =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{car}(\mathsf{x}), \mathsf{cdr}(\mathsf{y})\rangle : \mathsf{x} \in Y, \mathsf{y} \in X \mid \mathsf{cdr}(\mathsf{x})=\mathsf{car}(\mathsf{y})\}$

-- Inverse Map

14*a* $\Rrightarrow$ $X^{-\mathbf{1}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{cdr}(\mathsf{x}), \mathsf{car}(\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x} \in X\}$

-- Identity Map

14*b* $\Rrightarrow$ $\boldsymbol{\iota}_X =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{x}\rangle : \mathsf{x} \in X\}$

-- % The cardinality of a set

14c $\Rrightarrow$ $\mathsf{Ord}(\mathsf{enum\_Ord}(s))\ \&\ s=\{\mathsf{enum}(y,s) :\ y \in \mathsf{enum\_Ord}(s)\}$
$\&\ [\forall y \in \mathsf{enum\_Ord}(s), \forall z \in \mathsf{enum\_Ord}(s) \mid y{\neq}z \rightarrow \mathsf{enum}(y,s){\neq}\mathsf{enum}(z,s)]$

-- Cardinality

15 $\Rrightarrow$ $\#X \ =_{\mathrm{Def}}\ \mathbf{arb}(\{x :\ x \in \mathsf{next}(\mathsf{enum\_Ord}(X)) \mid [\exists f \mid \mathsf{1\text{–}1}(f)\ \&\ \mathbf{domain}(f)=x\ \&\ \mathbf{range}(f)=X]\})$

-- Cardinal

16 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Card}(X) \ \leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\ \mathsf{Ord}(X)\ \&\ [\forall y \in X, \forall f \mid \neg\mathbf{domain}(f)=y \vee \neg\mathbf{range}(f)=X \vee \neg\mathsf{Svm}(f)]$

-- % Elementary properties of maps, map restrictions, map values, etc.

23 $\vdash$ $F_{|A}{\subseteq}F$

24 $\vdash$ $S{\cap}T=\{x \in S \mid x \in T\}$

25 $\vdash$ $S{\setminus}T=\{x \in S \mid x \notin T\}$

26 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F) \leftrightarrow [\forall x \in F \mid x=\langle \mathsf{car}(x), \mathsf{cdr}(x)\rangle]$

27 $\vdash$ $G{\subseteq}F\ \&\ \mathsf{is\_map}(F) \rightarrow \mathsf{is\_map}(G)$

28 $\vdash$ $G{\subseteq}F\ \&\ \mathsf{Svm}(F) \rightarrow \mathsf{Svm}(G)$

29 $\vdash$ $G{\subseteq}F\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(G)$

30 $\vdash$ $X \in F \rightarrow \mathsf{car}(X) \in \mathbf{domain}(F)$

31 $\vdash$ $X \in F \rightarrow \mathsf{cdr}(X) \in \mathbf{range}(F)$

32 $\vdash$ $A{\cap}B=\{x \in A \mid x \in B\}$

33 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F)\ \&\ \mathsf{is\_map}(G) \rightarrow \mathsf{is\_map}(F{\cup}G)$

34 $\vdash$ $F_{|A\cup B}=F_{|A}{\cup}F_{|B}$

-- Associativity of map multiplication

35 $\vdash$ $F{\circ}(G{\circ}H)=(F{\circ}G){\circ}H$

36 $\vdash$ $(F{\cup}G)_{|A}=F_{|A}{\cup}G_{|A}$

37 $\vdash$ $F_{|\mathbf{domain}(F)}=F$

38 $\vdash$ $X \in \mathbf{domain}(F) \rightarrow F{\upharpoonright}X \in \mathbf{range}(F)$

39 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \leftrightarrow F=\{\langle x, F{\upharpoonright}x\rangle :\ x \in \mathbf{domain}(F)\}$

39a $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow F=\{\langle x, F{\upharpoonright}x\rangle :\ x \in \mathbf{domain}(F)\}\ \&\ \mathbf{range}(F)=\{F{\upharpoonright}x :\ x \in \mathbf{domain}(F)\}$

-- % Two elementary theories embodying some elementary lemmas about single-valued functions and maps

THEORY fcn_symbol(f, s)

$\Longrightarrow$ (g)

$\vdash$ $g=\{\langle x, f(x)\rangle :\ x \in s\}$

fcn_symbol · 1 $\vdash$ $\mathbf{domain}(g)=s$

fcn_symbol · 2 $\vdash$ $[\forall x \in s \mid g{\upharpoonright}x=f(x)]$

fcn_symbol · 3 $\vdash$ $X \notin s \rightarrow g{\upharpoonright}X=\emptyset$

fcn_symbol · 4 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(g)$

fcn_symbol · 5 $\vdash$ $\mathbf{range}(g)=\{f(x) :\ x \in s\}$

fcn_symbol · 6 $\vdash$ $[\forall x \in s, \forall y \in s \mid f(x)=f(y) \rightarrow x=y] \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(g)$

$--$ $\vdash$ $\#\{\langle x, f(x)\rangle :\ x \in s\}=\#s\ \&\ \#\{f(x) :\ x \in s\}{\subseteq}\#s$

END fcn_symbol

40 $\vdash$ $U=\langle A, B\rangle \rightarrow U=\langle \mathsf{car}(U), \mathsf{cdr}(U)\rangle$

41 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F)\ \&\ U \in F \rightarrow U=\langle \mathsf{car}(U), \mathsf{cdr}(U)\rangle$

THEORY iz_map(f, a, b, s)

$f=\{\langle a(x), b(x)\rangle :\ x \in s\}$

$\Longrightarrow$

iz_map · 1 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(f)$

END iz_map

-- % More elementary set-theoretic theorems for maps, domains and ranges, 1-1 maps, etc.

42 $\vdash$ $\mathbf{domain}\,(F\cup G)=\mathbf{domain}(F)\cup\mathbf{domain}(G)$

43 $\vdash$ $\mathbf{range}\,(F\cup G)=\mathbf{range}(F)\cup\mathbf{range}(G)$

44 $\vdash$ $\mathbf{domain}(F)=\emptyset \leftrightarrow \mathbf{range}(F)=\emptyset$

45 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ X\in F \rightarrow F\restriction\mathsf{car}(X)=\mathsf{cdr}(X)$

-- Union of single_valued maps

46 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ \mathbf{domain}(F)\cap\mathbf{domain}(G)=\emptyset \rightarrow \mathsf{Svm}(F\cup G)$

47 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F) \rightarrow \mathsf{is\_map}(F_{|S})$

48 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \mathsf{Svm}(F_{|S})$

49 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F_{|S})$

50 $\vdash$ $\mathbf{range}(F_{|S})\subseteq\mathbf{range}(F)$

50*a* $\vdash$ $\mathbf{domain}(F_{|S})=\mathbf{domain}(F)\cap S$

51 $\vdash$ $\mathbf{range}(G)\subseteq\mathbf{domain}(F) \rightarrow \mathbf{range}\,(F\circ G)=\mathbf{range}(F_{|\mathbf{range}(G)})\ \&\ \mathbf{domain}\,(F\circ G)=\mathbf{domain}(G)$

51*a* $\vdash$ $\mathbf{range}(G)=\mathbf{domain}(F) \rightarrow \mathbf{range}\,(F\circ G)=\mathbf{range}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F\circ G)=\mathbf{domain}(G)$

-- Union of 1-1 maps

52 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(G)\ \&\ \mathbf{range}(F)\cap\mathbf{range}(G)=\emptyset\ \&\ \mathbf{domain}(F)\cap\mathbf{domain}(G)=\emptyset \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F\cup G)$

53 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F^{-\mathbf{1}})\ \&\ \mathbf{range}\,(F^{-\mathbf{1}})=\mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F^{-\mathbf{1}})=\mathbf{range}(F)$

54 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F) \rightarrow F=(F^{-\mathbf{1}})^{-\mathbf{1}}$

55 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F^{-\mathbf{1}})\ \&\ F=(F^{-\mathbf{1}})^{-\mathbf{1}}\ \&\ \mathbf{range}\,(F^{-\mathbf{1}})=\mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathbf{domain}\,(F^{-\mathbf{1}})=\mathbf{range}(F)$

56 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow [\forall \mathsf{x}\in\mathbf{domain}(F)\mid F^{-\mathbf{1}}\restriction(F\restriction\mathsf{x})=\mathsf{x}]$

57 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow [\forall \mathsf{x}\in\mathbf{domain}(F)\mid F^{-\mathbf{1}}\restriction(F\restriction\mathsf{x})=\mathsf{x}]\ \&\ [\forall \mathsf{x}\in\mathbf{range}(F)\mid F\restriction(F^{-\mathbf{1}}\restriction\mathsf{x})=\mathsf{x}]$

-- Elementary Properties of identity maps

58 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(\boldsymbol{\iota}_S)\ \&\ \mathbf{domain}(\boldsymbol{\iota}_S)=S\ \&\ \mathbf{range}(\boldsymbol{\iota}_S)=S\ \&\ \boldsymbol{\iota}_S{}^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{\iota}_S\ \&\ [\forall\mathsf{x}\in S\mid\boldsymbol{\iota}_S\restriction\mathsf{x}=\mathsf{x}]$
$\&\ (\mathsf{is\_map}(F)\rightarrow(\mathbf{domain}(F)\subseteq S\rightarrow F\circ\boldsymbol{\iota}_S=F)\ \&\ (\mathbf{range}(F)\subseteq S\rightarrow\boldsymbol{\iota}_S\circ F=F))$

59 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow F\circ F^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{range}(F)}$

60 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow F\circ F^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{range}(F)}\ \&\ F^{-\mathbf{1}}\circ F=\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{domain}(F)}$

-- An inverse pair of maps must be 1-1 and must be each others inverses

61 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F)\ \&\ \mathsf{is\_map}(G)\ \&\ \mathbf{domain}(F)=\mathbf{range}(G)\ \&\ \mathbf{range}(F)=\mathbf{domain}(G)\ \&\ F\circ G=\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{range}(F)}$
$\&\ G\circ F=\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{domain}(F)} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ G=F^{-\mathbf{1}}$

62 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(F\circ G)$

63 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G) \rightarrow \mathsf{Svm}(F\circ G)$

64 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ X\in\mathbf{domain}(G)\ \&\ \mathbf{range}(G)\subseteq\mathbf{domain}(F) \rightarrow F\circ G\restriction X=F\restriction(G\restriction X)$

64*a* $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ X\in\mathbf{domain}(G)\ \&\ \mathbf{range}(G)\subseteq\mathbf{domain}(F) \rightarrow F\circ G\restriction X=F\restriction(G\restriction X)$
$\&\ F\circ G=\{\langle\mathsf{x},F\restriction(G\restriction\mathsf{x})\rangle:\ \mathsf{x}\in\mathbf{domain}(G)\}\ \&\ \mathbf{range}\,(F\circ G)=\{F\restriction(G\restriction\mathsf{x}):\ \mathsf{x}\in\mathbf{domain}(G)\}$

65 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(G) \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F\circ G)$

66 $\vdash$ $(F\cup\mathsf{H})\circ G=F\circ G\cup\mathsf{H}\circ G$

67 $\vdash$ $G\circ(F\cup\mathsf{H})=G\circ F\cup G\circ\mathsf{H}$

-- Cartesian Product

17 $\Rrightarrow$ $X\times Y \quad =_{\text{Def}} \quad \{\langle\mathsf{x},\mathsf{y}\rangle:\ \mathsf{x}\in Y,\ \mathsf{y}\in X\}$

68 $\vdash$ $F=\{\langle\langle\langle\mathsf{x},\mathsf{y}\rangle,\mathsf{z}\rangle,\langle\mathsf{x},\langle\mathsf{y},\mathsf{z}\rangle\rangle\rangle:\ \mathsf{x}\in A,\ \mathsf{y}\in B,\ \mathsf{z}\in C\} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathbf{domain}(F)=(A\times B)\times C$
$\&\ \mathbf{range}(F)=A\times(B\times C)$

69 $\vdash$ $F=\{\langle\langle\mathsf{x},\mathsf{y}\rangle,\langle\mathsf{y},\mathsf{x}\rangle\rangle:\ \mathsf{x}\in A,\ \mathsf{y}\in B\} \rightarrow \mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ \mathbf{domain}(F)=A\times B\ \&\ \mathbf{range}(F)=B\times A$

-- % Basic properties of the cardinality of a set, and related properties of ordinals. The notion of 'finiteness'

70 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ X \in S \rightarrow \mathsf{enum}(X,S)=X$

-- Cardinality Lemma

71 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\#S)\ \&\ [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f})=S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\#S$
$\&\ \neg[\exists \mathsf{o} \in \#S, \exists \mathsf{g} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{g})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{g})=S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\mathsf{o}]]$

-- The enumerating ordinal of a set has the same cardinality as the set

72 $\vdash$ $[\exists \mathsf{o} \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{o})\ \&\ S=\{\mathsf{enum}(\mathsf{x},S) : \mathsf{x} \in \mathsf{o}\}\ \&\ \#\mathsf{o}=\#S]$

-- 'arb' is monotone decreasing for non-empty sets of ordinals

73 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(R)\ \&\ R \supseteq S\ \&\ S \supseteq T \rightarrow \mathbf{arb}(S) \in \mathbf{arb}(T) \vee \mathbf{arb}(S)=\mathbf{arb}(T) \vee T=\emptyset$

-- Lemma for following theorem

74 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \subseteq S\ \&\ X \in S\ \&\ Y \in X \rightarrow \mathsf{enum}(Y,T) \in \mathsf{enum}(X,T) \vee \mathsf{enum}(X,T) \supseteq T$

-- Subsets enumerate at least as rapidly

75 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \subseteq S\ \&\ X \in S \rightarrow \mathsf{enum}(X,T) \supseteq X$

76 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \subseteq S \rightarrow \{\mathsf{enum}(\mathsf{x},T) : \mathsf{x} \in S\} \supseteq T$

77 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \subseteq S \rightarrow [\exists \mathsf{x} \subseteq S \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{x})\ \&\ T=\{\mathsf{enum}(\mathsf{y},T) : \mathsf{y} \in \mathsf{x}\}$
$\&\ [\forall \mathsf{y} \in \mathsf{x}, \forall \mathsf{z} \in \mathsf{x} \mid \mathsf{y} \neq \mathsf{z} \rightarrow \mathsf{enum}(\mathsf{y},T) \neq \mathsf{enum}(\mathsf{z},T)]]$

-- Subsets of an ordinal have a cardinality that is no larger than the ordinal

78 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ T \subseteq S \rightarrow \#T \subseteq S$

-- Single-valued maps have 1-1 partial inverses

79 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow [\exists \mathsf{h} \mid \mathbf{domain}(\mathsf{h})=\mathbf{range}(F)\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{h}) \subseteq \mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{h})$
$\&\ [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{range}(F) \mid F{\upharpoonright}(\mathsf{h}{\upharpoonright}\mathsf{x})=\mathsf{x}]]$

-- Cardinality theorem

80 $\vdash$ $\mathsf{Card}(\#S)\ \&\ [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f})=S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\#S]$

81 $\vdash$ $\#S=\emptyset \leftrightarrow S=\emptyset$

-- Uniqueness of Cardinality

82 $\vdash$ $\mathsf{Card}(C)\ \&\ [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f})=S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=C] \rightarrow C=\#S$

-- Subset cardinality theorem

83 $\vdash$ $T \subseteq S \rightarrow \#T \subseteq \#S$

84 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \#\mathbf{range}(F)=\#\mathbf{domain}(F)$

85 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \#\mathbf{range}(F) \subseteq \#\mathbf{domain}(F)$

85*a* $\vdash$ $F \subseteq G \rightarrow \mathbf{range}(F) \subseteq \mathbf{range}(G)\ \&\ \mathbf{domain}(F) \subseteq \mathbf{domain}(G)$

-- Finiteness

18 $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(X) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad \neg[\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=X\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f}) \subseteq X\ \&\ X \neq \mathbf{range}(\mathsf{f})]$

-- 0 is a finite cardinal

86 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\emptyset)\ \&\ \mathsf{Finite}(\emptyset)\ \&\ \mathsf{Card}(\emptyset)$

87 $\vdash$ $\#\mathbf{domain}(F) \subseteq \#F$

88 $\vdash$ $\#\mathbf{range}(F) \subseteq \#F$

89 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow \#\mathbf{domain}(F)=\#F$

90 $\vdash$ $\#S \supseteq \#T \leftrightarrow T=\emptyset \vee [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=S\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f})=T]$

91 $\vdash$ $\#S=\#T \leftrightarrow [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f})=S\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f})=T]$

ENTER_THEORY fcn_symbol

-- Add an additional results to the fcn_symbol theory

$\vdash$ $\#\{\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{s}\}=\#\mathsf{s}\ \&\ \#\{\mathsf{f}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{s}\} \subseteq \#\mathsf{s}$

ENTER_THEORY set_theory

-- Return to the top-level theory

92 $\vdash$ $\mathsf{Card}(S) \leftrightarrow S=\#S$

93 $\vdash$ $\#S=\#\#S$

94 $\vdash$ $\#S \in \#T \vee \#S=\#T \vee \#T \in \#S$

95 $\vdash$ $\#S \in \#T\ \&\ \#T \in \#R \rightarrow \#S \in \#R$

-- Associative Law for Cardinals

96 $\vdash$ $\#((A \times B) \times C)=\#(A \times (B \times C))$

-- Commutative Law for Cardinals

97 $\vdash$ $\#(A \times B)=\#(B \times A)$

-- % Properties of finite sets

-- A subset of a finite set is finite

98 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S)\ \&\ S \supseteq T \rightarrow \mathsf{Finite}(T)$

99 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow (\mathsf{1\text{–}1}(F) \leftrightarrow [\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F), \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(F) \mid F\restriction\mathsf{x} = F\restriction\mathsf{y} \rightarrow \mathsf{x}=\mathsf{y}])$

-- A 1-1 map on a set induces a 1-1 map on the power set of its domain

100 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ S \subseteq \mathbf{domain}(F)\ \&\ T \subseteq \mathbf{domain}(F)\ \&\ S \neq T \rightarrow \mathbf{range}(F_{|S}) \neq \mathbf{range}(F_{|T})$

-- Map product formula

101 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F)\ \&\ \mathsf{Svm}(G)\ \&\ \mathbf{range}(F) \subseteq \mathbf{domain}(G) \rightarrow G \circ F = \{\langle \mathsf{x}, G\restriction(F\restriction\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F)\}$
$\&\ \mathbf{domain}\,(G \circ F) = \mathbf{domain}(F)\ \&\ \mathbf{range}\,(G \circ F) = \{G\restriction(F\restriction\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F)\}$

102 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F))$

103 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F) \rightarrow (\mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F)))$

-- A single-valued map with finite domain has finite range

104 $\vdash$ $\mathsf{Svm(F)}\ \&\ \mathsf{Finite}(\mathbf{domain}(F)) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathbf{range}(F))$

105 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\#S)$

-- Proper subsets of a finite set have fewer elements

106 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S)\ \&\ T \subseteq S\ \&\ T \neq S \rightarrow \#T \in \#S$

107 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \neg[\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f}) = S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \subseteq S\ \&\ S \neq \mathbf{domain}(\mathsf{f})]$

108 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Finite}(S)\ \&\ T \in S \rightarrow \mathsf{Finite}(T)$

-- Any infinite ordinal is larger than any finite ordinal

109 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\ \&\ \mathsf{Ord}(T)\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(S)\ \&\ \mathsf{Finite}(T) \rightarrow T \in S$

-- Interchange Lemma

110 $\vdash$ $X \in S\ \&\ Y \in S \rightarrow [\exists \mathsf{f} \mid \mathsf{1\text{–}1}(\mathsf{f})\ \&\ \mathbf{range}(\mathsf{f}) = S\ \&\ \mathbf{domain}(\mathsf{f}) = S\ \&\ \mathsf{f}\restriction X = Y\ \&\ \mathsf{f}\restriction Y = X]$

111 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(F) \rightarrow F_{|S} = \{\langle \mathsf{x}, F\restriction\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \mid \mathsf{x} \in S\}\ \&\ \mathbf{domain}(F_{|S}) = \{\mathsf{x} \in \mathbf{domain}(F) \mid \mathsf{x} \in S\}$
$\&\ \mathbf{range}(F_{|S}) = \{F\restriction\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \mid \mathsf{x} \in S\}$

112 $\vdash$ $\mathsf{1\text{–}1}(F)\ \&\ X \in \mathbf{domain}(F)\ \&\ Y \in \mathbf{domain}(F)\ \&\ F\restriction X = F\restriction Y \rightarrow X = Y$

113 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(S \cup \{X\})$

114 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \mathsf{Finite}(\mathsf{next}(S))$

-- % Existence of an infinite cardinal

115 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(\mathsf{s\_inf})$

-- Infinite cardinality theorem

116 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(\#\mathsf{s\_inf})$

-- All finite ordinals are cardinals

117 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(X)\ \&\ \mathsf{Finite}(X) \rightarrow \mathsf{Card}(X)$

-- % The set of integers and basic properties of integers

18*a* $\Rrightarrow$ $\mathbb{N} =_{\text{Def}} \mathbf{arb}(\{\mathsf{x} \in \mathsf{next}(\#\mathsf{s\_inf}) \mid \neg\mathsf{Finite}(\mathsf{x})\})$

118 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\mathbb{N})\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(\mathbb{N})\ \&\ [\forall \mathsf{x} \mid \mathsf{Card}(\mathsf{x})\ \&\ \mathsf{Finite}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \mathsf{x} \in \mathbb{N}]$

-- Standard definitions of the finite integers,

-- 1 = next (0) & 2 = next (1) & 3 = next (2) & $\cdots$

18*b* $\Rrightarrow$ $1 =_{\text{Def}} \mathsf{next}(\emptyset)$

119 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(\emptyset)\ \&\ \emptyset \in \mathbb{N}\ \&\ 1 \in \mathbb{N}\ \&\ 2 \in \mathbb{N}\ \&\ 3 \in \mathbb{N}$

-- The set of integers is a Cardinal

120 $\vdash$ $\mathsf{Card}(\mathbb{N})$

121 $\vdash$ $\emptyset \in \mathbb{N}\ \&\ 1 \in \mathbb{N}\ \&\ 2 \in \mathbb{N}\ \&\ 3 \in \mathbb{N}\ \&\ 1 \neq \emptyset\ \&\ 2 \neq \emptyset\ \&\ 3 \neq \emptyset\ \&\ 1 \neq 2\ \&\ 1 \neq 3\ \&\ 2 \neq 3$

-- Cardinal sum

19 $\Rrightarrow$ $\mathsf{n} + \mathsf{m} =_{\text{Def}} \#\{\langle \mathsf{x}, \emptyset\rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{n}\} \cup \{\langle \mathsf{x}, 1\rangle : \mathsf{x} \in \mathsf{m}\}$

-- Cardinal product

20 $\Rrightarrow$ $X * Y =_{\text{Def}} \#(X \times Y)$

21 $\Rrightarrow$ $\mathcal{P}(X) =_{\text{Def}} \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \subseteq X\}$

-- Cardinal Difference

22 $\Rrightarrow$ $X - Y =_{\text{Def}} \#(X \backslash Y)$

-- Integer Quotient; Note that x **div** $0 = \mathbb{N}$ for $x \in \mathbb{N}$

23 $\Rrightarrow$ $X\ \mathbf{div}\ Y =_{\text{Def}} \bigcup\{\mathsf{k} \in \mathbb{N} \mid \mathsf{k} * Y \subseteq X\}$

-- Integer Remainder

24 $\Rrightarrow$ $X\ \mathbf{mod}\ Y =_{\text{Def}} X - (X\ \mathbf{div}\ Y) * Y$

122 $\vdash$ $\{\langle \mathsf{x}, \emptyset\rangle : \mathsf{x} \in N\} \cap \{\langle \mathsf{x}, 1\rangle : \mathsf{x} \in M\} = \emptyset$
123 $\vdash$ $\mathsf{is\_map}(\emptyset)$ & $\mathsf{Svm}(\emptyset)$ & $\mathsf{1\text{–}1}(\emptyset)$ & $\mathbf{range}(\emptyset)=\emptyset$ & $\mathbf{domain}(\emptyset)=\emptyset$
124 $\vdash$ $\mathsf{Svm}(\{\langle X, Y\rangle\})$ & $\mathsf{1\text{–}1}(\{\langle X, Y\rangle\})$ & $\{\langle X, Y\rangle\}\restriction X = Y$
125 $\vdash$ $X \neq \mathbb{N} \rightarrow \{\langle X, Y\rangle, \langle \mathbb{N}, W\rangle\}\restriction X = Y$
126 $\vdash$ $\#\{\langle \mathsf{x}, \emptyset\rangle : \mathsf{x} \in M\} = \#M$ & $\#\{\langle \mathsf{x}, 1\rangle : \mathsf{x} \in N\} = \#N$
127 $\vdash$ $N+M=\#N+\#M$
128 $\vdash$ $N+M=N+\#M$
129 $\vdash$ $N*M=\#N*\#M$
130 $\vdash$ $N*M=N*\#M$
131 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)$ & $M \subseteq N$ & $M \neq N \rightarrow \#M \in \#N$

-- % Induction principle for finite sets
THEORY $\mathsf{finite\_induction}(\mathsf{n}, P)$
$\mathsf{Finite}(\mathsf{n})$ & $P(\mathsf{n})$
$\Longrightarrow$ (m)
$\mathsf{m} \subseteq \mathsf{n}$ & $P(\mathsf{m})$ & $[\forall \mathsf{k} \subseteq \mathsf{m} \mid \mathsf{k} \neq \mathsf{m} \rightarrow \neg P(\mathsf{k})]$
END finite_induction

-- % More results on the cardinality of finite and infinite sets
132 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)$ & $\mathsf{Finite}(M) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(N \cup M)$
133 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N+M) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(N \cup M)$
134 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)$ & $\mathsf{Finite}(M) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(N+M)$
135 $\vdash$ $N \times \emptyset = \emptyset$ & $\emptyset \times N = \emptyset$
136 $\vdash$ $N*\emptyset=\emptyset$
137 $\vdash$ $\emptyset*N=\emptyset$
138 $\vdash$ $\#N+\emptyset=\#N$
139 $\vdash$ $\#\{C\}\times N=\#N$
140 $\vdash$ $\#N\times\{C\}=\#N$
141 $\vdash$ $1*N=\#N$
142 $\vdash$ $N*1=\#N$
143 $\vdash$ $M \neq \emptyset \rightarrow \#N \times M \supseteq \#N$
144 $\vdash$ $N+M=\#N\times\{\emptyset\}\cup M\times\{1\}$
145 $\vdash$ $A \cap B = \emptyset \rightarrow (X \times A) \cap (Y \times B) = \emptyset$
146 $\vdash$ $N+M=M+N$
147 $\vdash$ $N*M=M*N$
148 $\vdash$ $(A \times X) \cap (B \times X) = (A \cap B) \times X$ & $(A \times X) \cup (B \times X) = (A \cup B) \times X$
& $(X \times A) \cap (X \times B) = X \times (A \cap B)$ & $(X \times A) \cup (X \times B) = X \times (A \cup B)$
149 $\vdash$ $N+(M+K)=(N+M)+K$
150 $\vdash$ $N*(M*K)=(N*M)*K$
151 $\vdash$ $N*(M+K)=N*M+N*K$
152 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N)$ & $\mathsf{Finite}(M) \rightarrow \mathsf{Finite}(N*M)$
153 $\vdash$ $(\mathsf{Finite}(N)$ & $\mathsf{Finite}(M)) \vee N=\emptyset \vee M=\emptyset \leftrightarrow \mathsf{Finite}(N*M)$
154 $\vdash$ $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$
155 $\vdash$ $\mathsf{Finite}(N) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\mathcal{P}(N))$

-- % Cantor's Theorem
156 $\vdash$ $\#N \in \#\mathcal{P}(N)$
157 $\vdash$ $N-N=\emptyset$
158 $\vdash$ $N-\emptyset=\#N$

-- % More elementary results concerning integer arithmetic

-- Disjoint sum Lemma

159 ⊢ $N \cap M = \emptyset \rightarrow N + M = \#N \cup M$

160 ⊢ $N \cap M = \emptyset \;\&\; \mathsf{N2} \cap \mathsf{M2} = \emptyset \;\&\; \#N = \#\mathsf{N2} \;\&\; \#M = \#\mathsf{M2} \rightarrow \#(N \cup M) = \#(\mathsf{N2} \cup \mathsf{M2})$

-- Subtraction Lemma

161 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow \#N = \#M + (N - M)$

-- Subtraction Lemma

162 ⊢ $\#M \in \#N \vee \#M = \#N \rightarrow \#N = \#M + (\#N - \#M)$

-- Union Set

25 ⇛ $\bigcup X \quad =_{\text{Def}} \quad \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{y}, \mathsf{y} \in X\}$

-- Union set as an upper bound

163 ⊢ $[\forall \mathsf{x} \in S \,|\, \mathsf{x} \subseteq \bigcup S] \;\&\; ([\forall \mathsf{x} \in S \,|\, \mathsf{x} \subseteq T] \rightarrow \bigcup S \subseteq T)$

-- The union of a set of ordinals is an ordinal

164 ⊢ $[\forall \mathsf{x} \in S \,|\, \mathsf{Ord}(\mathsf{x})] \rightarrow \mathsf{Ord}(\bigcup S)$

165 ⊢ $M \neq \emptyset \rightarrow N \;\mathbf{div}\; M \subseteq N$

166 ⊢ $M \neq \emptyset \;\&\; N \in \mathbb{N} \rightarrow N \;\mathbf{div}\; M \in \mathbb{N} \;\&\; N \;\mathbf{div}\; M \subseteq N$

167 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N + M \in \mathbb{N} \;\&\; N * M \in \mathbb{N} \;\&\; N - M \in \mathbb{N}$

-- Strict monotonicity of addition

169 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; N \neq \emptyset \rightarrow M \in M + N$

-- Strict monotonicity of addition

170 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in N \rightarrow M + K \in M + N$

-- Cancellation

171 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; M + K = N + K \rightarrow M = N$

-- Monotonicity of Addition

172 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow M + K \subseteq N + K$

-- Monotonicity of Multiplication

173 ⊢ $M \subseteq N \rightarrow M * K \subseteq N * K$

-- Monotonicity of Addition

174 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \rightarrow (M + K \subseteq N + K \leftrightarrow M \subseteq N)$

-- Strict monotonicity of subtraction

175 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in N \;\&\; M \supseteq N \rightarrow M - N \in M - K$

176 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; N \supseteq M \;\&\; N - M \supseteq K \rightarrow N \supseteq M + K \;\&\; N - (M + K) = (N - M) - K$

177 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \rightarrow M + N - N = M$

-- Integer Division with Remainder

178 ⊢ $M \in \mathbb{N} \;\&\; N \in \mathbb{N} \;\&\; N \neq \emptyset \rightarrow M \;\mathbf{div}\; N \in \mathbb{N} \;\&\; M \supseteq (M \;\mathbf{div}\; N) * N \;\&\; M \;\mathbf{mod}\; N \in N$

179 ⊢ $\#\{S\} = \{\emptyset\}$

180 ⊢ $\#N = \emptyset \rightarrow N = \emptyset$

181 ⊢ $\#N * \#M = \emptyset \leftrightarrow N = \emptyset \vee M = \emptyset$

182 ⊢ $N \supseteq M \rightarrow N - K \supseteq M - K$

183 ⊢ $\mathsf{Finite}(N) \;\&\; N \supseteq M \rightarrow \#N \backslash M = \#\#N \backslash \#M$

184 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N + M - M = N$

185 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \rightarrow (N \supseteq M \leftrightarrow N + K \supseteq M + K)$

186 ⊢ $N \supseteq M \rightarrow \#N = \#M + \#(N \backslash M)$

187 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \;\&\; K \in \mathbb{N} \;\&\; N \supseteq M \rightarrow N + K - (M + K) = N - M$

188 ⊢ $N \in \mathbb{N} \;\&\; M \in \mathbb{N} \rightarrow N = M + (N - M) \vee N = M - (M - N)$

-- % Four utility theories concerning ordinal-valued functions, well-founded relations, well-orderings,
-- % and the ordering of product sets

THEORY $\mathsf{ordval\_fcn}(\mathsf{s}, \mathsf{f})$

-- Elementary functions of

$\mathsf{s} \neq \emptyset \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \,|\, \mathsf{Ord}(\mathsf{f}(\mathsf{x}))]$

⟹ (rng) -- Points at which f attains its minimum

-- $\mathsf{rng} =_{\text{Def}} \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \,|\, \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathbf{arb}(\{\mathsf{f}(\mathsf{u}) : \mathsf{u} \in \mathsf{s}\})\}$

$\mathsf{rng} = \{\mathsf{x} : \mathsf{x} \in \mathsf{s} \,|\, \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathbf{arb}(\{\mathsf{f}(\mathsf{y}) : \mathsf{y} \in \mathsf{s}\}) \;\&\; \mathsf{rng} \neq \emptyset \;\&\; [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{rng}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{s} \,|\, \mathsf{f}(\mathsf{x}) \subseteq \mathsf{f}(\mathsf{y})]\}$

$\mathsf{rng} \subseteq \mathsf{s}$

END ordval_fcn

THEORY well_founded_set(s, $\lhd$)
$[\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow [\exists m \in t, \forall u \in t \mid \neg u \lhd m]]$
-- $\lhd$ is thereby assumed to be an irreflexive well-founded relation on s
$\Longrightarrow$ (orden)
well_founded_set · 1 $\vdash$ $[\forall x \in s, \forall y \in s \mid (x \lhd y \rightarrow \neg y \lhd x) \,\&\, \neg x \lhd x]$
-- $\mathsf{Minrel}(T) =_{\mathrm{Def}}$ **if** $T \subseteq s \,\&\, T \neq \emptyset$ **then arb**$(\{m : m \in T \mid [\forall u \in T \mid \neg u \lhd m]\})$ **else** s **fi**
-- $\mathsf{orden}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Minrel}(s \setminus \{\mathsf{orden}(y) : y \in X\})$
well_founded_set · 2 $\vdash$ $s \subseteq \{\mathsf{orden}(y) : y \in X\} \leftrightarrow \mathsf{orden}(X) = s$
well_founded_set · 3 $\vdash$ $\mathsf{orden}(X) \neq s \leftrightarrow \mathsf{orden}(X) \in s$
-- Well-ordering complies with ordinal enumeration
well_founded_set · 5 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(U) \,\&\, \mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(U) \neq s \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \rightarrow (\mathsf{orden}(U) \lhd \mathsf{orden}(V) \rightarrow U \in V)$
well_founded_set · 6 $\vdash$ $\{u : u \in s \mid u \lhd \mathsf{orden}(V)\} \subseteq \{\mathsf{orden}(x) : x \in V\}$
-- Well-ordering is initially 1-1
well_founded_set · 7 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(U) \,\&\, \mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(U) \neq s \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \,\&\, U \neq V \rightarrow \mathsf{orden}(U) \neq \mathsf{orden}(V)$
well_founded_set · 8 $\vdash$ $[\exists o \mid \mathsf{Ord}(o) \,\&\, s = \{\mathsf{orden}(x) : x \in o\} \,\&\, 1\text{–}1(\{\langle x, \mathsf{orden}(x)\rangle : x \in o\})]$
END well_founded_set
THEORY well_ordered_set(s, $\lhd$)
$[\forall x \in s, \forall y \in s \mid (x \lhd y \vee y \lhd x \vee x = y) \,\&\, \neg x \lhd x] \,\&\, [\forall x \in s, \forall y \in s, \forall z \in s \mid x \lhd y \,\&\, y \lhd z \rightarrow x \lhd z]$
$\&\, [\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow [\exists x \in t, \forall y \in t \mid x \lhd y \vee x = y]]$
$\Longrightarrow$ (orden)
well_ordered_set · 1 $\vdash$ $[\forall t \subseteq s, \exists x \mid t \neq \emptyset \rightarrow x \in t \,\&\, [\forall y \in t \mid x \lhd y \vee x = y]]$
-- Minrel $\longrightarrow$ well_ordered_set · 1 $\Longrightarrow$ $[\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow \mathsf{Minrel}(t) \in t \,\&\, [\forall y \in t \mid \mathsf{Minrel}(t) \lhd y \vee \mathsf{Minrel}(t) = y]]$
-- $\mathsf{orden}(X) =_{\mathrm{Def}}$ **if** $s \subseteq \{\mathsf{orden}(y) : y \in X\}$ **then** s **else** $\mathsf{Minrel}(s \setminus \{\mathsf{orden}(y) : y \in X\})$ **fi**
well_ordered_set · 2 $\vdash$ $s \subseteq \{\mathsf{orden}(y) : y \in X\} \leftrightarrow \mathsf{orden}(X) = s$
well_ordered_set · 3 $\vdash$ $\mathsf{orden}(X) \neq s \rightarrow \mathsf{orden}(X) \in s$
-- Monotonicity of Minrel
-- well_ordered_set · 4 $\vdash$ $R \subseteq s \,\&\, T \subseteq R \,\&\, T \neq \emptyset \rightarrow \mathsf{Minrel}(R) = \mathsf{Minrel}(T) \vee \mathsf{Minrel}(R) \lhd \mathsf{Minrel}(T)$
-- Well-ordering is isomorphic to ordinal enumeration
well_ordered_set · 5 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(U) \,\&\, \mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(U) \neq s \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \rightarrow (\mathsf{orden}(U) \lhd \mathsf{orden}(V) \leftrightarrow U \in V)$
well_ordered_set · 6 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \rightarrow \{u : u \in s \mid u \lhd \mathsf{orden}(V)\} = \{\mathsf{orden}(x) : x \in V\}$
-- Well-ordering is initially 1-1
well_ordered_set · 7 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(U) \,\&\, \mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(U) \neq s \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \,\&\, U \neq V \rightarrow \mathsf{orden}(U) \neq \mathsf{orden}(V)$
well_ordered_set · 8 $\vdash$ $[\exists o \mid \mathsf{Ord}(o) \,\&\, s = \{\mathsf{orden}(x) : x \in o\} \,\&\, [\forall x \in o \mid \mathsf{orden}(x) \neq s] \,\&\, 1\text{–}1(\{\langle x, \mathsf{orden}(x)\rangle : x \in o\})]$
well_ordered_set · 9 $\vdash$ $(\mathsf{Ord}(V) \,\&\, \mathsf{orden}(V) \neq s \rightarrow 1\text{–}1(\{\langle x, \mathsf{orden}(x)\rangle : x \in V\}))$
$\&\, \mathbf{domain}(\{\langle x, \mathsf{orden}(x)\rangle : x \in V\}) = V$
$\&\, \mathbf{range}(\{\langle x, \mathsf{orden}(x)\rangle : x \in V\}) = \{u : u \in s \mid u \lhd \mathsf{orden}(V)\}$
$\&\, \{u : u \in s \mid u \lhd \mathsf{orden}(V)\} = \{\mathsf{orden}(x) : x \in V\}$
END well_ordered_set
THEORY product_order(o1, o2)
Ord(o1) & Ord(o2)
$\Longrightarrow$ (Ord1p2)
-- $\mathsf{Ord1p2}(X, Y) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{car}(X) \cup \mathsf{cdr}(X) \in \mathsf{car}(Y) \cup \mathsf{cdr}(Y)$
-- $\vee\, (\mathsf{car}(X) \cup \mathsf{cdr}(X) = \mathsf{car}(Y) \cup \mathsf{cdr}(Y) \,\&\, \mathsf{car}(X) \in \mathsf{car}(Y))$
-- $\vee\, (\mathsf{car}(X) \cup \mathsf{cdr}(X) = \mathsf{car}(Y) \cup \mathsf{cdr}(Y) \,\&\, \mathsf{car}(X) = \mathsf{car}(Y) \,\&\, \mathsf{cdr}(X) \in \mathsf{cdr}(Y))$
product_order · 1 $\vdash$ $[\forall x \in o1 \times o2 \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{car}(x))]$
product_order · 2 $\vdash$ $[\forall x \in o1 \times o2 \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{cdr}(x))]$
product_order · 3 $\vdash$ $[\forall x \in o1 \times o2 \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{car}(x) \cup \mathsf{cdr}(x))]$
product_order · 4 $\vdash$ $[\forall x \in o1 \times o2, \forall y \in o1 \times o2 \mid \mathsf{Ord1p2}(x, y) \vee \mathsf{Ord1p2}(y, x) \vee x = y \,\&\, \neg \mathsf{Ord1p2}(x, x)]$
product_order · 5 $\vdash$ $[\forall x \in o1 \times o2, \forall y \in o1 \times o2, \forall z \in o1 \times o2 \mid \mathsf{Ord1p2}(x, y) \,\&\, \mathsf{Ord1p2}(y, z) \rightarrow \mathsf{Ord1p2}(x, z)]$
product_order · 6 $\vdash$ $T \subseteq o1 \times o2 \,\&\, T \neq \emptyset \rightarrow [\exists x \in T, \forall y \in t \mid \mathsf{Ord1p2}(x, y) \vee x = y]$
END product_order

-- % The cardinal square theorem and lemmas needed to prove it

-- One more Lemma

189 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#S{=}\#S{\cup}\{C\}$

-- Division-by-2 Lemma

190 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow [\exists T \mid \#T{\times}\{\emptyset, 1\}{=}\#S]$

-- Cardinal Doubling Theorem

191 $\vdash$ $\mathsf{Card}(S)\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#S{\times}\{\emptyset, 1\}{=}\#S$

192 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow S{+}T{=}\#S{\cup}\#T\ \&\ \#(S{\cup}T){=}\#S{\cup}\#T$

-- Cardinal Square-root Lemma

193 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow [\exists T \mid \#(T{\times}T){=}\#S]$

-- Cardinal Square Theorem

194 $\vdash$ $\neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow \#(S{\times}S){=}\#S$

195 $\vdash$ $T \in S\ \&\ \mathsf{Card}(S)\ \&\ \neg\mathsf{Finite}(S) \rightarrow S{*}T{=}S$

-- % Signed Integers and their properties

26 $\Rrightarrow$ $\mathbb{Z} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{N}, \mathsf{y} \in \mathbb{N} \mid \mathsf{x}{=}\emptyset \vee \mathsf{y}{=}\emptyset\}$

-- Signed Integer Reduction to Normal Form

27 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Red}(X) =_{\mathrm{Def}} \langle \mathsf{car}(X){-}(\mathsf{car}(X){\cap}\mathsf{cdr}(X)), \mathsf{cdr}(X){-}(\mathsf{car}(X){\cap}\mathsf{cdr}(X))\rangle$

-- Signed Sum

28 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{Z}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Red}(\langle \mathsf{car}(X){+}\mathsf{car}(Y), \mathsf{cdr}(X){+}\mathsf{cdr}(Y)\rangle)$

-- Absolute value

28*a* $\Rrightarrow$ $|X|_{\mathbb{Z}} =_{\mathrm{Def}} \mathsf{car}(X){\cup}\mathsf{cdr}(X)$

-- Negative

28*b* $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(X) =_{\mathrm{Def}} \langle \mathsf{cdr}(X), \mathsf{car}(X)\rangle$

-- Signed Product

29 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{Z}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Red}(\langle \mathsf{car}(X){*}\mathsf{car}(Y){+}\mathsf{cdr}(X){*}\mathsf{cdr}(Y), \mathsf{car}(X){*}\mathsf{cdr}(Y){+}\mathsf{car}(Y){*}\mathsf{cdr}(X)\rangle)$

-- Signed Difference

32 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{Z}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Red}(\langle \mathsf{cdr}(Y){+}\mathsf{car}(X), \mathsf{car}(Y){+}\mathsf{cdr}(X)\rangle)$

-- Sign of a signed integer

33 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{car}(X){\supseteq}\mathsf{cdr}(X)$

196 $\vdash$ $M \in \mathbb{N}\ \&\ N \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle M, N\rangle) \in \mathbb{Z}\ \&\ M{\cap}N \in \mathbb{N}$

197 $\vdash$ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow N{=}\langle \mathsf{car}(N), \mathsf{cdr}(N)\rangle\ \&\ \mathsf{car}(N){=}\emptyset \vee \mathsf{cdr}(N){=}\emptyset\ \&\ \mathsf{car}(N) \in \mathbb{N}\ \&\ \mathsf{cdr}(N) \in \mathbb{N}\ \&\ \mathsf{Red}(N){=}N$
$\&\ \mathsf{car}(N){\cap}\mathsf{cdr}(N) \in \mathbb{N}$

199 $\vdash$ $N \in \mathbb{Z}\ \&\ M \in \mathbb{Z} \rightarrow N +_{\mathbb{Z}} M \in \mathbb{Z}\ \&\ N *_{\mathbb{Z}} M \in \mathbb{Z}$

200 $\vdash$ $N \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle N, N\rangle){=}\langle \emptyset, \emptyset\rangle$

201 $\vdash$ $J \in \mathbb{N}\ \&\ K \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle J{+}M, K{+}M\rangle){=}\mathsf{Red}(\langle J, K\rangle)$

202 $\vdash$ $J \in \mathbb{N}\ \&\ K \in \mathbb{N}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle{=}\langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$

203 $\vdash$ $K \in \mathbb{Z}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow K +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle{=}K +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$

204 $\vdash$ $K \in \mathbb{Z}\ \&\ N \in \mathbb{N}\ \&\ M \in \mathbb{N} \rightarrow K *_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle{=}K *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$

-- Commutativity Lemma
205 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow K +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \langle N, M\rangle +_{\mathbb{Z}} K$
-- Commutativity Lemma
206 ⊢ $J \in \mathbb{N} \,\&\, K \in \mathbb{N} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \langle N, M\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle J, K\rangle$
-- Commutative Law for Addition
207 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N +_{\mathbb{Z}} M = M +_{\mathbb{Z}} N$
208 ⊢ $J \in \mathbb{N} \,\&\, K \in \mathbb{N} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle J, K\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle N, M\rangle = \mathsf{Red}(\langle J, K\rangle) +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$
-- Commutative Law for Multiplication
209 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N *_{\mathbb{Z}} M = M *_{\mathbb{Z}} N$
-- Associative Law
210 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N +_{\mathbb{Z}} (M +_{\mathbb{Z}} K) = N +_{\mathbb{Z}} M +_{\mathbb{Z}} K$
-- Distributive Law
211 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N *_{\mathbb{Z}} (M +_{\mathbb{Z}} K) = N *_{\mathbb{Z}} M +_{\mathbb{Z}} N *_{\mathbb{Z}} K$
212 ⊢ $N \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Red}(\langle N, \emptyset\rangle) = \langle N, \emptyset\rangle$
-- Embedding of Integers in Signed Integers
213 ⊢ $N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle N+M, \emptyset\rangle = \langle N, \emptyset\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle \,\&\, \langle N*M, \emptyset\rangle = \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle \,\&\, N \supseteq M$
$\rightarrow \langle N, \emptyset\rangle -_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle = \langle N-M, \emptyset\rangle$
214 ⊢ $N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Red}(\langle M, N\rangle)) = \mathsf{Red}(\langle N, M\rangle)$
215 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M)$
-- Inversion Lemma
216 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) *_{\mathbb{Z}} M \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N *_{\mathbb{Z}} M) = N *_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M)$
-- Double inversion
217 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(K)) = K$
218 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} N = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N)) = N$
-- Associativity Lemma
219 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} N = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N)) = N$
-- Associativity Lemma
220 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{N} \,\&\, M \in \mathbb{N} \rightarrow \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} (\langle M, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} K) = \langle N, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle M, \emptyset\rangle *_{\mathbb{Z}} K$
224 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow N = M +_{\mathbb{Z}} (N -_{\mathbb{Z}} M)$
225 ⊢ $N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N +_{\mathbb{Z}} M) = \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(N) +_{\mathbb{Z}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(M)$
226 ⊢ $\langle \emptyset, 1\rangle *_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, 1\rangle = \langle 1, \emptyset\rangle$
227 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \rightarrow K *_{\mathbb{Z}} \langle 1, \emptyset\rangle = K$
228 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \rightarrow K -_{\mathbb{Z}} M = K +_{\mathbb{Z}} M *_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, 1\rangle$
229 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \rightarrow K -_{\mathbb{Z}} K = \langle \emptyset, \emptyset\rangle$
230 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \rightarrow K +_{\mathbb{Z}} \langle \emptyset, \emptyset\rangle = K$
231 ⊢ $K \in \mathbb{Z} \rightarrow \langle \emptyset, \emptyset\rangle +_{\mathbb{Z}} K = K$
-- $\mathbb{Z}$ is an Integral Domain
232 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \rightarrow \mathsf{m} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle \vee \mathsf{n} = \langle \emptyset, \emptyset\rangle]$
-- Distributivity of Subtraction
233 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = (\mathsf{m} -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k}) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n}]$
-- Si Cancellation
234 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{m} \in \mathbb{Z}, \forall \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{m} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} = \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n} \,\&\, \mathsf{n} \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle \rightarrow \mathsf{m} = \mathsf{k}]$
-- Multiplication by -1
235 ⊢ $[\forall \mathsf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{n}) = \langle \emptyset, 1\rangle *_{\mathbb{Z}} \mathsf{n}]$

-- % Another useful transfinite induction principle, cast as a theory
THEORY ordinal_induction(o, P)
Ord(o) & P(o)
$\Longrightarrow$ (t)
-- t $=_{\text{Def}}$ **arb**($\{\mathsf{x} \subseteq \mathsf{s} \mid \mathsf{Ord}(\mathsf{x}) \,\&\, P(\mathsf{x})\}$)
Ord(t) & P(t) & t⊆o & $[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{t} \mid \neg P(\mathsf{x})]$
END ordinal_induction

-- % Properties of the transitive membership closure of s

35*a* $\Rrightarrow$ $\mathsf{Ult\_membs}(X) =_{\mathrm{Def}} X\cup\{\mathsf{y} : \mathsf{u}\in\{\mathsf{Ult\_membs}(\mathsf{x}) : \mathsf{x}\in X\}, \mathsf{y}\in\mathsf{u}\}$

236 $\vdash$ $S\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

237 $\vdash$ $\mathsf{Ult\_membs}(S)=S\cup\{\mathsf{y} : \mathsf{x}\in S, \mathsf{y}\in\mathsf{Ult\_membs}(\mathsf{x})\}$

238 $\vdash$ $X\in S\ \&\ Y\in X\rightarrow Y\in\mathsf{Ult\_membs}(S)$

239 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\rightarrow\mathsf{Ult\_membs}(S)=S$

240 $\vdash$ $\mathsf{Ult\_membs}(\{S\})=\{S\}\cup\mathsf{Ult\_membs}(S)$

241 $\vdash$ $\mathsf{Ord}(S)\rightarrow\mathsf{Ult\_membs}(\{S\})=S\cup\{S\}$

242 $\vdash$ $Y\in\mathsf{Ult\_membs}(S)\rightarrow\mathsf{Ult\_membs}(Y)\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

243 $\vdash$ $Y\in\mathsf{Ult\_membs}(S)\rightarrow Y\subseteq\mathsf{Ult\_membs}(S)$

-- % Theories giving useful principles of transfinite and integer induction

THEORY transfinite_member_induction(n, P)
$P(\mathsf{n})$
$\Longrightarrow$ (m)
-- $\mathsf{m} =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\{\mathsf{k}\in\mathsf{Ult\_membs}(\{\mathsf{n}\})\mid P(\mathsf{k})\})$
$P(\mathsf{m})\ \&\ \mathsf{m}\in\mathsf{Ult\_membs}(\{\mathsf{n}\})\ \&\ [\forall\mathsf{k}\in\mathsf{m}\mid\neg P(\mathsf{k})]$
END transfinite_member_induction

THEORY mathematical_induction(P)
$[\exists\mathsf{n}\in\mathbb{N}\mid P(\mathsf{n})]$
$\Longrightarrow$ (m)
$\vdash$ $\mathsf{m}\in\mathbb{N}\ \&\ P(\mathsf{m})\ \&\ [\forall\mathsf{n}\in\mathsf{m}\mid\neg P(\mathsf{n})]$
END mathematical_induction

THEORY double_transfinite_induction(o, R)
$[\exists\mathsf{n}\in\mathsf{o}, \exists\mathsf{k}\in\mathsf{o}\mid R(\mathsf{n},\mathsf{k})]$
$\Longrightarrow$ (m, j)
$\vdash$ $R(\mathsf{m},\mathsf{j})\ \&\ [\forall\mathsf{k}\in\mathsf{m}, \forall\mathsf{h}\in\mathsf{o}\mid\neg R(\mathsf{k},\mathsf{h})]\ \&\ [\forall\mathsf{i}\in\mathsf{j}\mid\neg R(\mathsf{m},\mathsf{i})]$
END double_transfinite_induction

THEORY double_induction(R)
$[\exists\mathsf{n}\in\mathbb{N}, \exists\mathsf{k}\in\mathbb{N}\mid R(\mathsf{n},\mathsf{k})]$
$\Longrightarrow$ (m, j)
$\vdash$ $R(\mathsf{m},\mathsf{j})\ \&\ [\forall\mathsf{k}\in\mathsf{m}, \forall\mathsf{j}\in\mathbb{N}\mid\neg R(\mathsf{k},\mathsf{j})]\ \&\ [\forall\mathsf{i}\in\mathsf{j}\mid\neg R(\mathsf{m},\mathsf{i})]$
END double_induction

-- % Several theories satisfying free use of finitely recursive definitions of functions on the integers

THEORY finite_recursive_definition(f, g, P)
$\Longrightarrow$ (h)
$\vdash$ $[\forall\mathsf{n}\in\mathbb{N}, \exists\mathsf{h}, \forall\mathsf{s}, \forall\mathsf{x}\mid\#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n}\rightarrow\mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g2}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{s}) : \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x}\mid\mathsf{y}\neq\mathsf{x}\ \&\ P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
-- $\Rrightarrow$ $[\forall\mathsf{s}, \forall\mathsf{x}\mid\#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n}\rightarrow\mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g2}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{s}) : \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x}\mid\mathsf{y}\neq\mathsf{x}\ \&\ P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
$\vdash$ $[\exists\mathsf{h}, \forall\mathsf{n}\in\mathbb{N}, \forall\mathsf{s}, \forall\mathsf{x}\mid\#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n}\rightarrow\mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s}) : \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x}\mid\mathsf{y}\neq\mathsf{x}\ \&\ P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
-- $\Rrightarrow$ $[\forall\mathsf{n}\in\mathbb{N}, \forall\mathsf{s}, \forall\mathsf{x}\mid\#\mathsf{x}\subseteq\mathsf{n}\rightarrow\mathsf{h}(\mathsf{x},\mathsf{s})=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{s}),\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s}) : \mathsf{y}\subseteq\mathsf{x}\mid\mathsf{y}\neq\mathsf{x}\ \&\ P(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{s})\},\mathsf{x},\mathsf{s})]$
$\vdash$ $\mathsf{Finite}(X)\rightarrow\mathsf{h}(X,S)=\mathsf{f}(\{\mathsf{g4}(\mathsf{h}(\mathsf{y},S),X,\mathsf{y},S) : \mathsf{y}\subseteq X\mid\mathsf{y}\neq X\ \&\ P(X,\mathsf{y},S)\},X,S)$
END finite_recursive_definition

THEORY finite_recursive_definition2(f0, g0)
$\Longrightarrow$ (h)
$\mathsf{Finite}(X)\rightarrow\mathsf{h}(X,S)=$**if** $X=\emptyset$ **then** $\mathsf{f0}(S)$ **else** $\mathsf{g0}(\mathsf{h}(X\backslash\{\mathbf{arb}(X)\},S),X,S)$ **fi**
END finite_recursive_definition2

THEORY finite_recursive_definition3(f, g)
$\Longrightarrow$ (h)
$\mathsf{Finite}(X)\rightarrow\mathsf{h}(X)=$**if** $\mathsf{x}=\emptyset$ **then** f **else** $\mathsf{g2}(\mathsf{h}(X\backslash\{\mathbf{arb}(X)\}),X)$ **fi**
END finite_recursive_definition3

-- % A theory justifying the use of summation operators and giving the basic properties of such operators

THEORY sigma_theory(s, $\oplus$, e)

e $\in$ s

[$\forall$x $\in$ s | x$\oplus$e=x]

[$\forall$x $\in$ s, $\forall$y $\in$ s | x$\oplus$y=y$\oplus$x]

[$\forall$x $\in$ s, $\forall$y $\in$ s, $\forall$z $\in$ s | (x$\oplus$y)$\oplus$z=x$\oplus$(y$\oplus$z)]

$\Longrightarrow (\sum)$

-- **APPLY** finite_recursive_definition3(f $\mapsto$ e, g2(y, x) $\mapsto$ y$\oplus$cdr(**arb**(x))) $\Longrightarrow [\sum]$

-- $\sum(X)$=**if** $X=\emptyset$ **then** e **else** $\sum(X\setminus\{\mathbf{arb}(X)\})\oplus$cdr($\mathbf{arb}(X)$) **fi**

--

$\vdash$ $\sum(\emptyset)$=e

$\vdash$ [$\forall$x | cdr(x) $\in$ s $\rightarrow$ $\sum(\{x\})$=cdr(x)]

$\vdash$ Finite(F) & **range**(F)$\subseteq$s $\rightarrow$ $\sum(F) \in$ s

$\vdash$ Finite(F) & **range**(F)$\subseteq$s & $C \in F$ $\rightarrow$ $\sum(F)=\sum(F\setminus\{C\})\oplus$cdr($C$)

$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s $\rightarrow$ [$\forall$t | $\sum(F)=\sum(F_{|\mathbf{domain}(F)\cap t})\oplus\sum(F_{|\mathbf{domain}(F)\setminus t})$]

-- Rearrangement-of-sums Theorem

$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s & Svm(G) & **domain**(F)=**domain**(G)

$$\rightarrow \sum(F)=\sum\left(\left\{\langle y,\sum\left(F_{|\mathbf{range}((G)^{-1}{}_{|\{y\}})}\right)\rangle : y \in \mathbf{range}(G)\right\}\right)$$

-- Sum Permutation Theorem

$\vdash$ Finite(F) & is_map(F) & **range**(F)$\subseteq$s & 1–1(G) & **domain**(F)=**domain**(G)

$$\rightarrow \sum(F)=\sum\left(\left\{\langle y,\sum\left(F_{|\mathbf{range}((G)^{-1}{}_{|\{y\}})}\right)\rangle : y \in \mathbf{range}(G)\right\}\right)$$

END sigma_theory

-- % A theory justifying the standard mathematical use of 'equivalence classes'

THEORY $\mathsf{equivalence\_classes}(P, \mathsf{s})$

-- Theory of equivalence classes

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{s} \mid (P(\mathsf{x},\mathsf{y}) \leftrightarrow P(\mathsf{y},\mathsf{x})) \,\&\, P(\mathsf{x},\mathsf{x})]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{z} \in \mathsf{s} \mid P(\mathsf{x},\mathsf{y}) \,\&\, P(\mathsf{y},\mathsf{z}) \rightarrow P(\mathsf{x},\mathsf{z})]$

$\Longrightarrow (\,\mathsf{Eqc}, \mathsf{f}\,)$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{f}(\mathsf{x}) \in \mathsf{Eqc}] \,\&\, [\forall \mathsf{y} \in \mathsf{Eqc} \mid \mathbf{arb}(\mathsf{y}) \in \mathsf{s} \,\&\, \mathsf{f}(\mathbf{arb}(\mathsf{y}))=\mathsf{y}]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{s} \mid P(\mathsf{x},\mathsf{y}) \leftrightarrow \mathsf{f}(\mathsf{x})=\mathsf{f}(\mathsf{y})]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s} \mid P(\mathsf{x}, \mathbf{arb}(\mathsf{f})(\mathsf{x}))]$

END $\mathsf{equivalence\_classes}$

35 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Fr} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{Z}, \mathsf{y} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{y} \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle\}$

36 $\Rrightarrow$ $X \approx_{\mathsf{Fr}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{car}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(Y) = \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{car}(Y)$

245 $\vdash$ $[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{Fr} \mid (\mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{y} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{x}) \,\&\, \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{x}]$

246 $\vdash$ $[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{Fr}, \forall \mathsf{z} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{y} \,\&\, \mathsf{y} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{z} \rightarrow \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{z}]$

APPLY $\mathsf{equivalence\_classes}(P(\mathsf{x},\mathsf{y}) \mapsto \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{y}, \mathsf{s} \mapsto \mathsf{Fr}) \Longrightarrow [\mathbb{Q}, \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}) \in \mathbb{Q}] \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{arb}(\mathsf{x}) \in \mathsf{Fr} \,\&\, \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathbf{arb}(\mathsf{x}))=\mathsf{x}]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}) = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{y})]$

$[\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathbf{arb}(\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}))]$

-- % The rational numbers and their properties

247 $\vdash$ $[\forall \mathsf{y} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{arb}(\mathsf{y}) \in \mathsf{Fr} \,\&\, \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathbf{arb}(\mathsf{y}))=\mathsf{y}] \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}) \in \mathbb{Q}]$
$\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr}, \forall \mathsf{y} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}) = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{y})] \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Fr} \mid \mathsf{x} \approx_{\mathsf{Fr}} \mathbf{arb}(\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\mathsf{x}))]$

37 $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{Q}} =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\langle \emptyset, \emptyset\rangle, \langle 1, \emptyset\rangle\rangle)$

37a $\Rrightarrow$ $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\langle 1, \emptyset\rangle, \langle 1, \emptyset\rangle\rangle)$

-- Rational Sum

38 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}}$
$\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(Y)) +_{\mathbb{Z}} \mathsf{car}(\mathbf{arb}(Y)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)), \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(Y))\rangle)$

-- Rational product

39 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{car}(\mathbf{arb}(Y)), \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(Y))\rangle)$

-- Reciprocal

40 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)), \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X))\rangle)$

-- Rational quotient

41 $\Rrightarrow$ $X /_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} X *_{\mathbb{Q}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(Y)$

-- Rational negative

42 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(\mathbf{arb}(X))), \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X))\rangle)$

-- Nonnegative Rational

43 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)))$

-- Rational Subtraction

44 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{Q}} Y =_{\mathrm{Def}} X +_{\mathbb{Q}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(Y)$

-- Rational Comparison

$--$ 45 $\Rrightarrow$ $X >_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X -_{\mathbb{Q}} Y) \,\&\, X \neq Y$

-- % Two utility theories giving properties of addition operators in ordered groups

THEORY $\mathsf{Ordered\_add}(\mathsf{g},\mathsf{e},\oplus,\ominus,\mathsf{rvz},\mathsf{nneg})$

$\mathsf{e}\in\mathsf{g}\ \&\ [\forall \mathsf{x}\in\mathsf{g}\mid \mathsf{x}\oplus\mathsf{e}=\mathsf{x}\ \&\ \mathsf{x}\oplus\mathsf{rvz}(\mathsf{x})=\mathsf{e}\ \&\ \mathsf{rvz}(\mathsf{x})\in\mathsf{g}]$

$[\forall \mathsf{x}\in\mathsf{g},\forall\mathsf{y}\in\mathsf{g}\mid \mathsf{x}\oplus\mathsf{y}\in\mathsf{g}\ \&\ \mathsf{x}\oplus\mathsf{y}=\mathsf{y}\oplus\mathsf{x}\ \&\ \mathsf{x}\oplus\mathsf{rvz}(\mathsf{y})=\mathsf{x}\ominus\mathsf{y}]$

$[\forall \mathsf{x}\in\mathsf{g},\forall\mathsf{y}\in\mathsf{g},\forall\mathsf{z}\in\mathsf{g}\mid (\mathsf{x}\oplus\mathsf{y})\oplus\mathsf{z}=\mathsf{x}\oplus(\mathsf{y}\oplus\mathsf{z})]$

$[\forall \mathsf{x}\in\mathsf{g},\forall\mathsf{y}\in\mathsf{g}\mid \mathsf{nneg}(\mathsf{x})\ \&\ \mathsf{nneg}(\mathsf{y})\rightarrow\mathsf{nneg}(\mathsf{x}\oplus\mathsf{y})]$

$[\forall \mathsf{x}\in\mathsf{g}\mid (\mathsf{nneg}(\mathsf{x})\vee\mathsf{nneg}(\mathsf{rvz}(\mathsf{x})))\ \&\ (\mathsf{nneg}(\mathsf{x})\ \&\ \mathsf{nneg}(\mathsf{rvz}(\mathsf{x}))\rightarrow\mathsf{x}=\mathsf{e})]$

$\Longrightarrow(\succcurlyeq_{\mathsf{g}},\preccurlyeq_{\mathsf{g}},\succ_{\mathsf{g}},\prec_{\mathsf{g}})$

-- Note that no theorems need to be proved since a decision algorithm is available

-- $\Rrightarrow\ X\succcurlyeq_{\mathsf{g}}Y\ \leftrightarrow_{\text{Def}}\mathsf{nneg}(X\oplus\mathsf{rvz}(Y))$

-- $\Rrightarrow\ X\preccurlyeq_{\mathsf{g}}Y\ \leftrightarrow_{\text{Def}}Y\succcurlyeq_{\mathsf{g}}X$

-- $\Rrightarrow\ X\succ_{\mathsf{g}}Y\ \leftrightarrow_{\text{Def}}X\succcurlyeq_{\mathsf{g}}Y\ \&\ X\neq Y$

-- $\Rrightarrow\ X\prec_{\mathsf{g}}Y\ \leftrightarrow_{\text{Def}}Y\succ_{\mathsf{g}}X$

$X\succcurlyeq_{\mathsf{g}}Y\leftrightarrow\mathsf{nneg}(X\oplus\mathsf{rvz}(Y))$

$X\preccurlyeq_{\mathsf{g}}Y\leftrightarrow Y\succcurlyeq_{\mathsf{g}}X$

$X\succ_{\mathsf{g}}Y\leftrightarrow X\succcurlyeq_{\mathsf{g}}Y\ \&\ X\neq Y$

$X\prec_{\mathsf{g}}Y\leftrightarrow Y\succ_{\mathsf{g}}X$

END $\mathsf{Ordered\_add}$

-- % Various lemmas stating elementary properties of unsigned and signed integer arithmetic

248 $\vdash\ (X\in\mathbb{Z}\rightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X)\vee\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(X)))\ \&\ (\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X)\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(X))\rightarrow X=\langle\emptyset,\emptyset\rangle)$

249 $\vdash\ X\in\mathbb{Z}\ \&\ Y\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X)\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(Y)\rightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X+_{\mathbb{Z}}Y)\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X*_{\mathbb{Z}}Y)$

APPLY $\mathsf{Ordered\_add}(\mathsf{g}\mapsto\mathbb{Z},\mathsf{e}\mapsto\langle\emptyset,\emptyset\rangle,\oplus\mapsto\ +_{\mathbb{Z}},\mathsf{rvz}\mapsto\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}},\mathsf{nneg}\mapsto\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}})\Longrightarrow[\geqslant_{\mathbb{Z}},\leqslant_{\mathbb{Z}},>_{\mathbb{Z}},<_{\mathbb{Z}}]$

249*a* $\vdash\ (X\geqslant_{\mathbb{Z}}Y\leftrightarrow\mathsf{nneg}(X\oplus\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(Y)))\ \&\ (X\leqslant_{\mathbb{Z}}Y\leftrightarrow Y\geqslant_{\mathbb{Z}}X)\ \&\ (X>_{\mathbb{Z}}Y\leftrightarrow X\geqslant_{\mathbb{Z}}Y\ \&\ X\neq Y)$
$\&\ (X<_{\mathbb{Z}}Y\leftrightarrow Y>_{\mathbb{Z}}X)$

251 $\vdash\ X\in\mathbb{Z}\ \&\ Y\in\mathbb{Z}\ \&\ X\neq\langle\emptyset,\emptyset\rangle\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X)\rightarrow(\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X*_{\mathbb{Z}}Y)\leftrightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(Y))$

252 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\leftrightarrow X=\langle\mathsf{car}(X),\mathsf{cdr}(X)\rangle\ \&\ \mathsf{car}(X)\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathsf{cdr}(X)\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathsf{cdr}(X)\neq\langle\emptyset,\emptyset\rangle$

253 $\vdash\ N\in\mathbb{Q}\rightarrow\mathbf{arb}(N)\in\mathsf{Fr}\ \&\ \mathbf{arb}(N)=\langle\mathsf{car}(\mathbf{arb}(N)),\mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(N))\rangle\ \&\ \mathsf{car}(\mathbf{arb}(N))\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(N))\in\mathbb{Z}$
$\&\ \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(N))\neq\langle\emptyset,\emptyset\rangle$

254 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\ \&\ Y\in\mathsf{Fr}\ \&\ X\approx_{\mathsf{Fr}}Y\ \&\ W\in\mathsf{Fr}\ \&\ \mathbb{N}\in\mathsf{Fr}\ \&\ W\approx_{\mathsf{Fr}}\mathbb{N}$
$\rightarrow\langle\mathsf{car}(X)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(W)+_{\mathbb{Z}}\mathsf{car}(W)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(X),\mathsf{cdr}(X)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(W)\rangle$
$\approx_{\mathsf{Fr}}\langle\mathsf{car}(Y)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(\mathbb{N})+_{\mathbb{Z}}\mathsf{car}(\mathbb{N})*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(Y),\mathsf{cdr}(Y)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(\mathbb{N})\rangle$

255 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\ \&\ Y\in\mathsf{Fr}\ \&\ X\approx_{\mathsf{Fr}}Y\ \&\ W\in\mathsf{Fr}\ \&\ \mathbb{N}\in\mathsf{Fr}\ \&\ W\approx_{\mathsf{Fr}}\mathbb{N}$
$\rightarrow\langle\mathsf{car}(X)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{car}(W),\mathsf{cdr}(X)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(W)\rangle\approx_{\mathsf{Fr}}\langle\mathsf{car}(Y)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{car}(\mathbb{N}),\mathsf{cdr}(Y)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(\mathbb{N})\rangle$

-- % Elementary laws of rational arithmetic

256 $\vdash\ X\in\mathbb{Q}\ \&\ Y\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathbb{N}\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathbb{N}\neq\langle\emptyset,\emptyset\rangle$
$\rightarrow X+_{\mathbb{Q}}\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y,\mathbb{N}\rangle)=\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\mathsf{car}(\mathbf{arb}(X))*_{\mathbb{Z}}\mathbb{N}+_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X))*_{\mathbb{Z}}Y,\mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X))*_{\mathbb{Z}}\mathbb{N}\rangle)$

257 $\vdash\ X\in\mathbb{Q}\ \&\ Y\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathbb{N}\in\mathbb{Z}\ \&\ \mathbb{N}\neq\langle\emptyset,\emptyset\rangle$
$\rightarrow X*_{\mathbb{Q}}\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y,\mathbb{N}\rangle)=\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle\mathsf{car}(\mathbf{arb}(X))*_{\mathbb{Z}}Y,\mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X))*_{\mathbb{Z}}\mathbb{N}\rangle)$

258 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\rightarrow X\approx_{\mathsf{Fr}}\langle\mathsf{Si\_Rev}(\mathsf{car}(X)),\mathsf{Si\_Rev}(\mathsf{cdr}(X))\rangle$

259 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\ \&\ Y\in\mathsf{Fr}\ \&\ X\approx_{\mathsf{Fr}}Y\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{cdr}(X))\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{cdr}(Y))$
$\rightarrow(\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(X))\vee\mathsf{car}(X)=\langle\emptyset,\emptyset\rangle\leftrightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(Y))\vee\mathsf{car}(Y)=\langle\emptyset,\emptyset\rangle)$

261 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\ \&\ Y\in\mathsf{Fr}\ \&\ X\approx_{\mathsf{Fr}}Y\rightarrow(\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(X)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(X))\leftrightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(Y)*_{\mathbb{Z}}\mathsf{cdr}(Y)))$

262 $\vdash\ X\in\mathsf{Fr}\rightarrow(\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X)\leftrightarrow\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\langle\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{car}(X)),\mathsf{Rev}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{cdr}(X))\rangle))$

-- Commutativity of Addition

264 $\vdash$ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N +_{\mathbb{Q}} M = M +_{\mathbb{Q}} N$

265 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle$
$\rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) +_{\mathbb{Q}} X = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} +_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

266 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle$
$\rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) +_{\mathbb{Q}} X = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} +_{\mathbb{Z}} \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

-- Commutativity of Multiplication

267 $\vdash$ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} M = M *_{\mathbb{Q}} N$

268 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \in \mathbb{Z} \,\&\, \mathbb{N} \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle Y, \mathbb{N} \rangle) *_{\mathbb{Q}} X$
$= \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} Y, \mathsf{cdr}(\mathbf{arb}(X)) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} \rangle)$

269 $\vdash$ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N +_{\mathbb{Q}} (M +_{\mathbb{Q}} K) = N +_{\mathbb{Q}} M +_{\mathbb{Q}} K$

270 $\vdash$ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M = M +_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

271 $\vdash$ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M +_{\mathbb{Q}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

272 $\vdash$ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N = M +_{\mathbb{Q}} (N -_{\mathbb{Q}} M)$

273 $\vdash$ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} (M *_{\mathbb{Q}} K) = N *_{\mathbb{Q}} M *_{\mathbb{Q}} K$

274 $\vdash$ $K \in \mathbb{Z} \,\&\, N \in \mathbb{Z} \,\&\, M \in \mathbb{Z} \,\&\, K \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \,\&\, M \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle N, M \rangle) = \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle K *_{\mathbb{Z}} N, K *_{\mathbb{Z}} M \rangle)$

275 $\vdash$ $K \in \mathbb{Q} \,\&\, N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \rightarrow N *_{\mathbb{Q}} (M +_{\mathbb{Q}} K) = N *_{\mathbb{Q}} M +_{\mathbb{Q}} N *_{\mathbb{Q}} K$

276 $\vdash$ $X \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \in \mathbb{Z} \,\&\, Y \neq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rightarrow (\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle X, Y \rangle)) \leftrightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(X *_{\mathbb{Z}} Y))$

277 $\vdash$ $M \in \mathbb{Q} \rightarrow M = M *_{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

278 $\vdash$ $M \in \mathbb{Q} \,\&\, M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(M) \in \mathbb{Q} \,\&\, M *_{\mathbb{Q}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

279 $\vdash$ $N \in \mathbb{Q} \,\&\, M \in \mathbb{Q} \,\&\, M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow N = M *_{\mathbb{Q}} N /_{\mathbb{Q}} M$

280 $\vdash$ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{0}_{\mathbb{Q}}) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})$

281 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \vee \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(X)) \,\&\, (\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(X)) \rightarrow X = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}})$

APPLY $\mathsf{Ordered\_add}(\mathsf{g} \mapsto \mathbb{Q}, \mathsf{e} \mapsto \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}, \oplus \mapsto\ +_{\mathbb{Q}}, \ominus \mapsto\ +_{\mathbb{Q}}, \mathsf{rvz} \mapsto \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}, \mathsf{nneg} \mapsto \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}})$
$\Longrightarrow [\geqslant_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}}, >_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}}]$

281*a* $\vdash$ $(X \geqslant_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow \mathsf{nneg}(X \oplus \mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(Y))) \,\&\, (X \leqslant_{\mathbb{Z}} Y \leftrightarrow Y \geqslant_{\mathbb{Q}} X) \,\&\, (X >_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow X \geqslant_{\mathbb{Q}} Y \,\&\, X \neq Y)$
$\&\, (X <_{\mathbb{Q}} Y \leftrightarrow Y >_{\mathbb{Q}} X)$

282 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow X = X *_{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$

283 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow (X = \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \leftrightarrow \mathsf{car}(\mathbf{arb}(X)) = \langle \emptyset, \emptyset \rangle)$

284 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(Y) \rightarrow \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X +_{\mathbb{Q}} Y) \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Q}}(X *_{\mathbb{Q}} Y)$

291 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, \mathsf{X1} \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} Y \,\&\, \mathsf{X1} >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow X *_{\mathbb{Q}} \mathsf{X1} >_{\mathbb{Q}} Y *_{\mathbb{Q}} \mathsf{X1}$

292 $\vdash$ $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

293 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) >_{\mathbb{Q}} \mathbf{0}_{\mathbb{Q}}$

294 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \,\&\, Y \in \mathbb{Q} \,\&\, X >_{\mathbb{Q}} Y \rightarrow X >_{\mathbb{Q}} (X +_{\mathbb{Q}} Y) /_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) \,\&\, (X +_{\mathbb{Q}} Y) /_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) >_{\mathbb{Q}} Y$

-- % The Real numbers

46 $\Rrightarrow$ $\mathbb{R} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{s} :\ \mathsf{s} \subseteq \mathbb{Q} \mid (\mathsf{s} \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{s} \neq \mathbb{Q} \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \exists \mathsf{y} \in \mathsf{s} \mid \mathsf{y} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}] \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{s}, \forall \mathsf{y} \in \mathbb{Q} \mid \mathsf{x} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{y} \in \mathsf{s}])\}$

-- Real 0 and 1

47 $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}\}$

-- Real 0 and 1

47*a* $\Rrightarrow$ $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}\}$

-- Real Sum

48 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{u} +_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} :\ \mathsf{u} \in X, \mathsf{v} \in Y\}$

-- Real Negative

49 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{Rev}_{\mathbb{Q}}(\mathsf{u}) +_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} :\ \mathsf{u} \in \mathbb{Q} \backslash X, \mathsf{v} \in \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\}$

-- Real Subtraction

50 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} X +_{\mathbb{R}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(Y)$

-- Absolute value, i.e. the larger of X and $\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X)$

51 $\Rrightarrow$ $|X|_{\mathbb{R}} =_{\mathrm{Def}} X \cup \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X)$

-- Real Multiplication of Absolute Values

52 $\Rrightarrow$ $X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{u} *_{\mathbb{Q}} \mathsf{v} :\ \mathsf{u} \in |X|_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{v} \in |Y|_{\mathbb{R}} \mid \neg(\mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{u} \vee \mathbf{0}_{\mathbb{Q}} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{v})\} \cup \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

-- Real Multiplication

53 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \textbf{if } X \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \leftrightarrow Y \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ then } X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y \textbf{ else } \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X \,|{*}|_{\mathbb{R}}\, Y) \textbf{ fi}$

-- Real Absolute Reciprocal

54 $\Rrightarrow$ $\mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}} \bigcup\{\mathsf{y} :\ \mathsf{y} \in \mathbb{R} \mid |X|_{\mathbb{R}} *_{\mathbb{R}} \mathsf{y} \subseteq \{\mathsf{r} \in \mathbb{Q} \mid \mathsf{Fr\_to\_}\mathbb{Q}(\langle 1, 1\rangle) >_{\mathbb{Q}} \mathsf{r}\}\}$

-- Real Reciprocal

55 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Recip}_{\mathbb{R}}(X) =_{\mathrm{Def}}$ $\textbf{if } X \supseteq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ then } \mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X) \textbf{ else } \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{AbsRecip}_{\mathbb{R}}(X)) \textbf{ fi}$

-- Real Quotient

56 $\Rrightarrow$ $X /_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} X *_{\mathbb{R}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{R}}(Y)$

-- Non-negative Real

56*a* $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \subseteq X$

-- Real Comparison

56*b* $\Rrightarrow$ $X >_{\mathbb{R}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X -_{\mathbb{R}} Y)\ \&\ \neg X = Y$

-- Real Comparison

56*c* $\Rrightarrow$ $X \geqslant_{\mathbb{R}} Y =_{\mathrm{Def}} \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X -_{\mathbb{R}} Y)$

-- Real square root

57 $\Rrightarrow$ $\sqrt{X} =_{\mathrm{Def}} \bigcup\{\mathsf{y} :\ \mathsf{y} \in \mathbb{R} \mid \mathsf{y} *_{\mathbb{R}} \mathsf{y} \subseteq X\}$

-- % Elementary laws of real arithmetic

295 $\vdash$ $X \in \mathbb{Q} \rightarrow \{\mathsf{y} :\ \mathsf{y} \in \mathbb{Q} \mid X >_{\mathbb{Q}} \mathsf{y}\} \in \mathbb{R}$

296 $\vdash$ $\mathbf{0}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\ \&\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}})\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}})\ \&\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

297 $\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow N \subseteq \mathbb{Q}$

298 $\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow [\exists \mathsf{m} \in \mathbb{Q}, \forall \mathsf{x} \in N \mid \mathsf{m} >_{\mathbb{Q}} \mathsf{x}]$

299 $\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} M \in \mathbb{R}$

300 $\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} M = M +_{\mathbb{R}} N$

301 $\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow N = N +_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

302 $\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N) \in \mathbb{R}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{Z}\ \&\ M \in \mathbb{Z}\ \&\ M \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(M)$
$\quad \rightarrow [\exists \mathsf{k} \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}(N -_{\mathbb{Z}} \mathsf{k} *_{\mathbb{Z}} M)\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{Z}}((\mathsf{k} +_{\mathbb{Z}} \langle 1, \emptyset\rangle) *_{\mathbb{Z}} M) -_{\mathbb{Z}} N]$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N \subseteq M \vee M \subseteq N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N \cup M \in \mathbb{R}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\ \&\ N \subseteq |N|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N = M +_{\mathbb{R}} (N -_{\mathbb{R}} M)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N\ |{*}|_{\mathbb{R}}\ M = M\ |{*}|_{\mathbb{R}}\ N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N *_{\mathbb{R}} M = M *_{\mathbb{R}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} = \textbf{if } \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(N) \textbf{ then } N \textbf{ else } \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N) \textbf{ fi}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\ \&\ |N|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} N \vee |N|_{\mathbb{R}} = N\ \&\ |N|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(|N|_{\mathbb{R}})$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} = |\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}}(N)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M)) \rightarrow N >_{\mathbb{R}} N +_{\mathbb{R}} M \vee N = N +_{\mathbb{R}} M$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(N)\ \&\ \neg\mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(M) \rightarrow N >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee N = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$
$\quad \vee\ \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M) >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(M) = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} \mathsf{n} \vee \mathsf{n} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = \mathsf{n}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N +_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |N -_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}} \vee |N|_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N -_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} *_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N *_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R}\ \&\ M \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow |N|_{\mathbb{R}} /_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{R}} = |N /_{\mathbb{R}} M|_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R}\ \&\ M \in \mathbb{R} \rightarrow N\ |{*}|_{\mathbb{R}}\ M \in \mathbb{R}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(N)) = N$

$\vdash$ $K \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{n} \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{m} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathsf{n} *_{\mathbb{R}} (\mathsf{m} *_{\mathbb{R}} K) = \mathsf{n} *_{\mathbb{R}} \mathsf{m} *_{\mathbb{R}} K$

$\vdash$ $X \in \mathbb{R}\ \&\ Y \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{X1} \in \mathbb{R}\ \&\ X >_{\mathbb{R}} Y\ \&\ \mathsf{X1} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow X *_{\mathbb{R}} \mathsf{X1} >_{\mathbb{R}} Y *_{\mathbb{R}} \mathsf{X1}$

$\vdash$ $X \in \mathbb{R}\ \&\ X >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{Q}}(X) >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$

$\vdash$ $X \in \mathbb{R}\ \&\ Y \in \mathbb{R}\ \&\ X >_{\mathbb{R}} Y \rightarrow X >_{\mathbb{R}} (X +_{\mathbb{R}} Y) /_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{R}})\ \&\ (X +_{\mathbb{R}} Y) /_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) >_{\mathbb{R}} Y$

-- % The Least Upper Bound principle for real numbers

$\vdash$ $S \neq \emptyset\ \&\ S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \bigcup S \in \mathbb{R} \vee \bigcup S = \mathbb{Q}$

$\vdash$ $X \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \sqrt{X} \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(\sqrt{X})\ \&\ \sqrt{X} *_{\mathbb{R}} \sqrt{X} = X$

$\vdash$ $X \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(X)\ \&\ Y \in \mathbb{R}\ \&\ \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(Y) \rightarrow \sqrt{X *_{\mathbb{R}} Y} = \sqrt{X} *_{\mathbb{R}} \sqrt{Y}$

-- % Complex Numbers

58 $\Rrightarrow$ $\mathbb{C} =_{\text{Def}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

-- Complex Sum

59 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y), \mathsf{cdr}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y)\rangle$

-- Complex Product

60 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y) -_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y), \mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(Y) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(Y)\rangle$

-- Complex Norm

61 $\Rrightarrow$ $|X|_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \sqrt{\mathsf{car}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{car}(X) +_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X) *_{\mathbb{R}} \mathsf{cdr}(X)}$

-- Complex reciprocal

62 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(X) =_{\text{Def}} \langle \mathsf{car}(X) /_{\mathbb{R}} (|X|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X|_{\mathbb{C}}), \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{cdr}(X) /_{\mathbb{R}} (|X|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X|_{\mathbb{C}}))\rangle$

-- Complex Quotient

63 $\Rrightarrow$ $X /_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} X *_{\mathbb{C}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(Y)$

63*a* $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(X) =_{\text{Def}} \langle \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{car}(X)), \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(\mathsf{cdr}(X))\rangle$

63*b* $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{C}} Y =_{\text{Def}} X +_{\mathbb{C}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(Y)$

63*x* $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle$

63*y* $\Rrightarrow$ $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle$

$\vdash$ $(X \in \mathbb{R} \,\&\, Y \in \mathbb{R} \rightarrow \langle X, Y\rangle \in \mathbb{C}) \,\&\, (M \in \mathbb{C} \rightarrow M{=}\langle \mathsf{car}(M), \mathsf{cdr}(M)\rangle \,\&\, \mathsf{car}(M) \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{cdr}(M) \in \mathbb{R})$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} M \in \mathbb{C}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} M{=}M +_{\mathbb{C}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow N{=}N +_{\mathbb{C}} \mathbf{0}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N) \in \mathbb{C} \,\&\, \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N)){=}N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} \mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}(N){=}\mathbf{0}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N{=}M +_{\mathbb{C}} (N -_{\mathbb{C}} M)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} M{=}M *_{\mathbb{C}} N$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R} \,\&\, \mathsf{is\_nonneg}_{\mathbb{R}}(|N|_{\mathbb{C}})$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}}{=}|\mathsf{Rev}_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{C}}(N)$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}} \vee |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}} >_{\mathbb{R}} |N +_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}} \vee |N|_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N -_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{C}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N *_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow |N|_{\mathbb{C}} /_{\mathbb{R}} |M|_{\mathbb{C}}{=}|N /_{\mathbb{C}} M|_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} M \in \mathbb{C}$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N +_{\mathbb{C}} (M +_{\mathbb{C}} K){=}(N +_{\mathbb{C}} M) +_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} (M *_{\mathbb{C}} K){=}(N *_{\mathbb{C}} M) *_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $K \in \mathbb{C} \,\&\, N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \rightarrow N *_{\mathbb{C}} (M +_{\mathbb{C}} K){=}N *_{\mathbb{C}} M +_{\mathbb{C}} N *_{\mathbb{C}} K$

$\vdash$ $M \in \mathbb{C} \rightarrow M{=}M *_{\mathbb{C}} \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(M) \in \mathbb{C} \,\&\, M *_{\mathbb{C}} \mathsf{Recip}_{\mathbb{C}}(M){=}\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$

$\vdash$ $N \in \mathbb{C} \,\&\, M \in \mathbb{C} \,\&\, M{\neq}\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \rightarrow N{=}M *_{\mathbb{C}} (N /_{\mathbb{C}} M)$

$\vdash$ $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C} \,\&\, \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$

-- % Sequences of real numbers

-- Sums for Real Maps with finite domains

APPLY $\mathsf{sigma\_theory}(\mathsf{s} \mapsto \mathbb{R}, \oplus \mapsto +_{\mathbb{R}}, \mathsf{e} \mapsto \mathbf{0}_{\mathbb{R}}) \Longrightarrow [\sum_{\mathbb{R}}]$

64 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{f}){\subseteq}\mathbb{R} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{f}) \rightarrow \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}) \in \mathbb{R} \,\&\, (\mathsf{p} \in \mathsf{f} \rightarrow \sum_{\mathbb{R}}(\{\mathsf{p}\}){=}\mathsf{f}(\mathsf{cdr}(\mathsf{p})))$
$\&\, [\forall \mathsf{a} \mid \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}){=}\sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{f})\cap\mathsf{a}}) +_{\mathbb{R}} \sum_{\mathbb{R}}(\mathsf{f}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{f})\setminus\mathsf{a}})]$

-- Sums of absolutely convergent infinite series

64*b* $\Rrightarrow$ $\sum_{\mathbb{R}}^{\infty}(X) =_{\text{Def}} \bigcup\{\sum_{\mathbb{R}}(X_{|\mathsf{s}}) :\ \mathsf{s}{\subseteq}\mathbf{domain}(X) \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{s})\}$

-- % Real functions of a real variable

65 $\Rrightarrow$ $\mathbb{F} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{f}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f})=\mathbb{R}\}$

-- Sum of Real Functions

66 $\Rrightarrow$ $X +_{\mathbb{F}} Y =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, X\!\upharpoonright\!\mathsf{x} +_{\mathbb{R}} Y\!\upharpoonright\!\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- Product of Real Functions

67 $\Rrightarrow$ $X *_{\mathbb{F}} Y =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, X\!\upharpoonright\!\mathsf{x} *_{\mathbb{R}} Y\!\upharpoonright\!\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- LUB of a set of Real Functions

68 $\Rrightarrow$ $\mathsf{LUB}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \bigcup\{\mathsf{f}\!\upharpoonright\!\mathsf{x} : \mathsf{f}\in X\}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- Constant zero function

69 $\Rrightarrow$ $\mathbf{0}_{\mathbb{F}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

$\vdash$ $N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} M = M +_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} M = M +_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} M = M *_{\mathbb{F}} N$

$\vdash$ $K\in\mathbb{F} \,\&\, N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N +_{\mathbb{F}} (M +_{\mathbb{F}} K) = (N +_{\mathbb{F}} M) +_{\mathbb{F}} K$

$\vdash$ $K\in\mathbb{F} \,\&\, N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} (M *_{\mathbb{F}} K) = (N *_{\mathbb{F}} M) *_{\mathbb{F}} K$

$\vdash$ $K\in\mathbb{F} \,\&\, N\in\mathbb{F} \,\&\, M\in\mathbb{F} \rightarrow N *_{\mathbb{F}} (M +_{\mathbb{F}} K) = N *_{\mathbb{F}} M +_{\mathbb{F}} N *_{\mathbb{F}} K$

-- Sums of finite and infinite series of real functions

APPLY $\mathsf{sigma\_theory}(\mathsf{s}\mapsto\mathbb{F}, \oplus\mapsto +_{\mathbb{F}}, \mathsf{e}\mapsto\mathbf{0}_{\mathbb{F}}) \Longrightarrow [\sum_{\mathbb{F}}]$

70 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Svm}(\mathsf{ser}) \,\&\, \mathbf{range}(\mathsf{ser})\subseteq\mathbb{F} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{ser}) \rightarrow \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser})\in\mathbb{F} \,\&\, (\mathsf{p}\in\mathsf{ser} \rightarrow \sum_{\mathbb{F}}(\{\mathsf{p}\})=\mathsf{ser}(\mathsf{cdr}(\mathsf{p})))$
$\&\, [\forall \mathsf{a} \mid \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}) = \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{ser})\cap\mathsf{a}}) +_{\mathbb{F}} \sum_{\mathbb{F}}(\mathsf{ser}_{|\mathbf{domain}(\mathsf{ser})\setminus\mathsf{a}})]$

-- Sums of absolutely convergent infinite series of real functions

71 $\Rrightarrow$ $\sum_{\mathbb{F}}^{\infty}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathsf{LUB}(\{\sum_{\mathbb{R}}(X_{|\mathsf{s}}) : \mathsf{s}\subseteq\mathbf{domain}(X) \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{s})\})$

-- Product of a nonempty family of sets;

-- Note: this is also the real greatest lower bound

72 $\Rrightarrow$ $\mathsf{GLB}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{x}\in\mathbf{arb}(X) \mid [\forall \mathsf{y}\in X \mid \mathsf{x}\in\mathsf{y}]\}$

-- Block function

73 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Bl\_f}(X,Y,U) =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } X\subseteq\mathsf{x} \,\&\, \mathsf{x}\subseteq Y \textbf{ then } U \textbf{ else } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- Block function integral

74 $\Rrightarrow$ $\mathsf{BFInt}(X) =_{\mathrm{Def}} \mathbf{arb}(\{\mathsf{c} *_{\mathbb{R}} (\mathsf{b} -_{\mathbb{R}} \mathsf{a}) : \mathsf{a}\in\mathbb{R}, \mathsf{b}\in\mathbb{R}, \mathsf{c}\in\mathbb{R} \mid \mathsf{Bl\_f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})=X\})$

-- Block functions

75 $\Rrightarrow$ $\mathsf{RBF} =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{Bl\_f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}) : \mathsf{a}\in\mathbb{R}, \mathsf{b}\in\mathbb{R}, \mathsf{c}\in\mathbb{R}\}$

-- Comparison of real functions

76 $\Rrightarrow$ $X >_{\mathbb{F}} Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} X\neq Y \,\&\, [\forall \mathsf{x}\in\mathbb{R} \mid X\!\upharpoonright\!\mathsf{x} \supseteq Y\!\upharpoonright\!\mathsf{x}]$

-- Lebesgue Upper Integral of a Positive Function

77 $\Rrightarrow$ $\int^{+} X =_{\mathrm{Def}}$
$\mathsf{GLB}(\{\{\langle \mathsf{n}, \mathsf{BFInt}(\mathsf{ser}\!\upharpoonright\!\mathsf{n})\rangle : \mathsf{n}\in\mathbb{N}\} : \mathsf{ser}\subseteq\mathbb{N}\times\mathsf{RBF} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{ser}) \,\&\, \sum_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathsf{ser}) >_{\mathbb{F}} X\})$

-- Positive Part of real function

78 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Pos\_part}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } X\!\upharpoonright\!\mathsf{x}\supseteq\mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ then } X\!\upharpoonright\!\mathsf{x} \textbf{ else } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- Reverse of a real function

79 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Rev}_{\mathbb{F}}(X) =_{\mathrm{Def}} \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{Rev}_{\mathbb{R}}(X\!\upharpoonright\!\mathsf{x})\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{R}\}$

-- Lebesgue Integral

81 $\Rrightarrow$ $\int X =_{\mathrm{Def}} \int^{+} \mathsf{Pos\_part}(X) -_{\mathbb{R}} \int^{+} \mathsf{Pos\_part}(\mathsf{Rev}_{\mathbb{F}}(X))$

-- Continuous function of a real variable

82 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{F}}(X) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ & $\mathsf{Svm}(X)$ & $[\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ & $\varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ & $\delta \supseteq |\mathsf{x} -_{\mathbb{R}} \mathsf{y}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X \upharpoonright \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} X \upharpoonright \mathsf{y}|_{\mathbb{R}}]$

-- Euclidean n-space

83 $\Rrightarrow$ $E(X) \quad =_{\text{Def}} \quad \{\mathsf{f} \subseteq X \times \mathbb{R} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f})$ & $\mathbf{domain}(\mathsf{f}) = X\}$

-- Euclidean norm

84 $\Rrightarrow$ $\|X\|_{\mathbb{R}} \quad =_{\text{Def}} \quad \sqrt{\sum_{\mathbb{R}}}(X)$

-- Difference of Real Functions

85 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{F}} Y \quad =_{\text{Def}} \quad \{\langle \mathsf{x}, X \upharpoonright \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} Y \upharpoonright \mathsf{x} \rangle : \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X)\}$

-- Continuous function on Euclidean n-space

86 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_REnF}(X, Y) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad X \subseteq E(Y) \times \mathbb{R}$ & $\mathsf{Svm}(X)$ & $[\forall \mathsf{x} \in \mathbf{domain}(X), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall \mathsf{y} \in \mathbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ & $\varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ & $\delta \supseteq \|\mathsf{x} -_{\mathbb{F}} \mathsf{y}\|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X \upharpoonright \mathsf{x} -_{\mathbb{R}} X \upharpoonright \mathsf{y}|_{\mathbb{R}}]$

-- % Basic definitional principles of complex analysis

-- Difference-and-diagonal trick

87 $\Rrightarrow$ $\mathsf{DD}(X,Y) =_{\text{Def}} \{\textbf{if } \mathsf{x}\restriction\emptyset \neq \mathsf{x}\restriction 1 \textbf{ then } (X\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) -_{\mathbb{R}} X\restriction(\mathsf{x}\restriction 1)) /_{\mathbb{R}} (\mathsf{x}\restriction\emptyset -_{\mathbb{R}} \mathsf{x}\restriction 1) \textbf{ else } Y\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x} \in E(2)\}$

-- Derivative of function of a real variable

88 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Der}(X) =_{\text{Def}} \textbf{arb}\big(\{\mathsf{df} \in \mathbb{F} \mid \textbf{domain}(X)=\textbf{domain}(\mathsf{df}) \,\&\, \mathsf{is\_continuous\_REnF}(\mathsf{DD}(X,\mathsf{df})_{|\textbf{domain}(X)\times\textbf{domain}(X)}, 2)\}\big)$

-- Complex functions of a complex variable

89 $\Rrightarrow$ $\mathbb{CF} =_{\text{Def}} \{\mathsf{f}\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \textbf{domain}(\mathsf{f})=\mathbb{C}\}$

-- Complex Euclidean n-space

90 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CE}(X) =_{\text{Def}} \{\mathsf{f}\subseteq X\times\mathbb{C} \mid \mathsf{Svm}(\mathsf{f}) \,\&\, \textbf{domain}(\mathsf{f})=X\}$

-- Complex Euclidean norm

91 $\Rrightarrow$ $\|X\|_{\mathbb{C}} =_{\text{Def}} \sqrt{\textstyle\sum_{\mathbb{R}}}(\{\langle \mathsf{m}, |X\restriction\mathsf{m}|_{\mathbb{C}} *_{\mathbb{R}} |X\restriction\mathsf{m}|_{\mathbb{C}}\rangle : \mathsf{m} \in \textbf{domain}(X)\})$

-- Difference of Complex Functions

92 $\Rrightarrow$ $X -_{\mathbb{CF}} Y =_{\text{Def}} \{\langle \mathsf{x}, X\restriction\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} Y\restriction\mathsf{x}\rangle : \mathsf{x}\in\mathbb{C}\}$

-- Continuous function of a complex variable

93 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(X) \leftrightarrow_{\text{Def}} X\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C} \,\&\, \mathsf{Svm}(X) \,\&\, [\forall \mathsf{x}\in\textbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R}, \forall \mathsf{y}\in\textbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \delta \supseteq |\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{y}|_{\mathbb{C}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X\restriction\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} X\restriction\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Continuous function on Complex Euclidean n-space

94 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CEnF}(X,Y) \leftrightarrow_{\text{Def}} X\subseteq\mathsf{CE}(Y)\times\mathsf{CE}(Y) \,\&\, \mathsf{Svm}(X) \,\&\, [\forall \mathsf{x}\in\textbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R}, \forall \mathsf{y}\in\textbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \delta \supseteq |\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} \mathsf{y}|_{\mathbb{C}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X\restriction\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} X\restriction\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Difference-and-diagonal trick, complex case

95 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CDD}(X,Y) =_{\text{Def}} \{\textbf{if } \mathsf{x}\restriction\emptyset \neq \mathsf{x}\restriction 1 \textbf{ then } (X\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) -_{\mathbb{C}} X\restriction(\mathsf{x}\restriction 1)) /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x}\restriction\emptyset -_{\mathbb{C}} \mathsf{x}\restriction 1) \textbf{ else } Y\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x} \in \mathsf{CE}(2)\}$

-- Derivative of function of a complex variable

96 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CDer}(X) =_{\text{Def}} \textbf{arb}\big(\{\mathsf{df} \in \mathbb{CF} \mid \textbf{domain}(X)=\textbf{domain}(\mathsf{df}) \,\&\, \mathsf{is\_continuous\_CEnF}(\mathsf{CDD}(X,\mathsf{df})_{|\textbf{domain}(X)\times\textbf{domain}(X)}, 2)\}\big)$

-- Open set in the complex plane

97 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_open\_C\_set}(X) \leftrightarrow_{\text{Def}} X\subseteq\mathbb{C} \,\&\, \mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(\{\langle \mathsf{z}, \textbf{if } \mathsf{z}\in X \textbf{ then } \langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \textbf{ else } \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \textbf{ fi}\rangle : \mathsf{z}\in\mathbb{C}\})$

-- Analytic function of a complex variable

98 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(X) \leftrightarrow_{\text{Def}} \mathsf{is\_continuous}_{\mathbb{CF}}(X) \,\&\, \mathsf{is\_open\_C\_set}(\textbf{domain}(X)) \,\&\, \mathsf{CDer}(X)\neq\emptyset$

-- Complex exponential function

99 $\Rrightarrow$ $\mathsf{C\_exp\_fcn} =_{\text{Def}} \textbf{arb}(\{\mathsf{f}\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{C} : \mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathsf{CDer}(\mathsf{f})=\mathsf{f} \,\&\, \mathsf{f}\restriction\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle = \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle\})$

-- The constant π

100 $\Rrightarrow$ $\pi =_{\text{Def}} \textbf{arb}\big(\{\mathsf{x}\in\mathbb{R} \mid \mathsf{x} >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathsf{x}\rangle) = \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \,\&\, [\forall \mathsf{y}\in\mathbb{R} \mid \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathsf{y}\rangle) = \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\rangle \rightarrow \mathsf{y}=\mathsf{x} \vee \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\supseteq\mathsf{y}]\}\big)$

-- Continuous complex function on the reals

101 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CoRF}(X) \leftrightarrow_{\text{Def}} X\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{C} \,\&\, \mathsf{Svm}(X) \,\&\, [\forall \mathsf{x}\in\textbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R}, \forall \mathsf{y}\in\textbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \delta \supseteq |\mathsf{x} -_{\mathbb{R}} \mathsf{y}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq \|X\restriction\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} X\restriction\mathsf{y}\|_{\mathbb{R}}]$

-- Difference-and-diagonal trick, real-to-complex case

102 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CRDD}(X,Y) =_{\text{Def}} \{\textbf{if } \mathsf{x}\restriction\emptyset \neq \mathsf{x}\restriction 1 \textbf{ then } (X\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) -_{\mathbb{C}} X\restriction(\mathsf{x}\restriction 1)) /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x}\restriction\emptyset -_{\mathbb{C}} \mathsf{x}\restriction 1) \textbf{ else } Y\restriction(\mathsf{x}\restriction\emptyset) \textbf{ fi} : \mathsf{x} \in E(2)\}$

-- Continuous complex function on $E(n)$

103 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_continuous\_CREnF}(X,Y) \leftrightarrow_{\text{Def}} X\subseteq E(Y)\times\mathbb{C} \,\&\, \mathsf{Svm}(X) \,\&\, [\forall \mathsf{x}\in\textbf{domain}(X), \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \exists\delta\in\mathbb{R}, \forall \mathsf{y}\in\textbf{domain}(X) \mid \delta >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, \delta \supseteq \|\mathsf{x} -_{\mathbb{F}} \mathsf{y}\|_{\mathbb{R}} \rightarrow \varepsilon \supseteq |X\restriction\mathsf{x} -_{\mathbb{CF}} X\restriction\mathsf{y}|_{\mathbb{C}}]$

-- Derivative of complex function of a real variable

104 $\Rrightarrow$ $\mathsf{CRDer}(X) =_{\text{Def}} \textbf{arb}\big(\{\mathsf{df} \in \mathbb{CF} \mid \textbf{domain}(X)=\textbf{domain}(\mathsf{df}) \,\&\, \mathsf{is\_continuous\_CREnF}(\mathsf{CRDD}(X,\mathsf{df})_{|\textbf{domain}(X)\times\textbf{domain}(X)}, 2)\}\big)$

-- Real Interval

105 $\Rrightarrow$ $\mathsf{Interval}(X,Y) =_{\text{Def}} \{\mathsf{x}\in\mathbb{R} \mid X\subseteq\mathsf{x} \,\&\, \mathsf{x}\subseteq Y\}$

-- Continuously differentiable curve in the complex plane

106 $\Rrightarrow$ $\mathsf{is\_CD\_curv}(X,Y,U) \leftrightarrow_{\text{Def}} \mathsf{is\_continuous\_CoRF}(X) \,\&\, \textbf{domain}(X)=\mathsf{Interval}(Y,U) \,\&\, \emptyset\neq\mathsf{CRDer}(X) \,\&\, \mathsf{is\_continuous\_CoRF}(\mathsf{CRDer}(X))$

-- % Complex line integrals and the Cauchy Integral Formula

107 $\Rrightarrow$ $\oint_U^V (X,Y) \quad =_{\text{Def}}$

$\langle \int \{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } \mathsf{x} \notin \mathsf{Interval}(U,V) \textbf{ then } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ else } \mathsf{car}(X \restriction (\mathsf{curv} \restriction \mathsf{x}) *_{\mathbb{C}} \mathsf{CRDer}(Y) \restriction \mathsf{x}) \textbf{ fi} \rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\},$
$\int \{\langle \mathsf{x}, \textbf{if } \mathsf{x} \notin \mathsf{Interval}(U,V) \textbf{ then } \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \textbf{ else } \mathsf{cdr}(X \restriction (\mathsf{curv} \restriction \mathsf{x}) *_{\mathbb{C}} \mathsf{CRDer}(Y) \restriction \mathsf{x}) \textbf{ fi} \rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\} \rangle$

-- Cauchy integral theorem

$\vdash$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f}) \rightarrow [\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon >_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}} \,\&\, [\forall \mathsf{crv1}, \forall \mathsf{crv2} \mid \mathsf{is\_CD\_curv}(\mathsf{crv1}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \,\&\, \mathsf{is\_CD\_curv}(\mathsf{crv1}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}})$
$\& \, \mathsf{crv1} \restriction \mathbf{0}_{\mathbb{R}} = \mathsf{crv1} \restriction \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \,\&\, \mathsf{crv2} \restriction \mathbf{0}_{\mathbb{R}} = \mathsf{crv2} \restriction \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \,\&\, [\forall \mathsf{x} \in \mathsf{Interval}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}) \mid \varepsilon \supseteq |\mathsf{crv1} \restriction \mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{crv2} \restriction \mathsf{x}|_{\mathbb{C}}]$
$\rightarrow \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}} (\mathsf{f}, \mathsf{crv1}) = \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}} (\mathsf{f}, \mathsf{crv2})]]$

-- Cauchy integral formula

$\vdash$ $\mathsf{is\_analytic}_{\mathbb{CF}}(\mathsf{f}) \,\&\, \mathbf{domain}(\mathsf{f}) \supseteq \{\mathsf{z} \in \mathbb{C} : \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \geqslant_{\mathbb{R}} |\mathsf{z}|_{\mathbb{C}}\} \rightarrow [\forall \mathsf{z} \in \mathbb{C} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{R}} >_{\mathbb{R}} |\mathsf{z}|_{\mathbb{C}}$
$\rightarrow \mathsf{f} \restriction \mathsf{z} = \oint_{\mathbf{0}_{\mathbb{R}}}^{\pi +_{\mathbb{R}} \pi} (\{\langle \mathsf{x}, \mathsf{f} \restriction \mathsf{x} /_{\mathbb{C}} (\mathsf{x} -_{\mathbb{C}} \mathsf{z}) \rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{C} \backslash \{\mathsf{z}\}\}, \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{C\_exp\_fcn}(\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathsf{x} \rangle) \rangle : \mathsf{x} \in \mathbb{R}\}) /_{\mathbb{C}} \langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \pi +_{\mathbb{R}} \pi \rangle]$