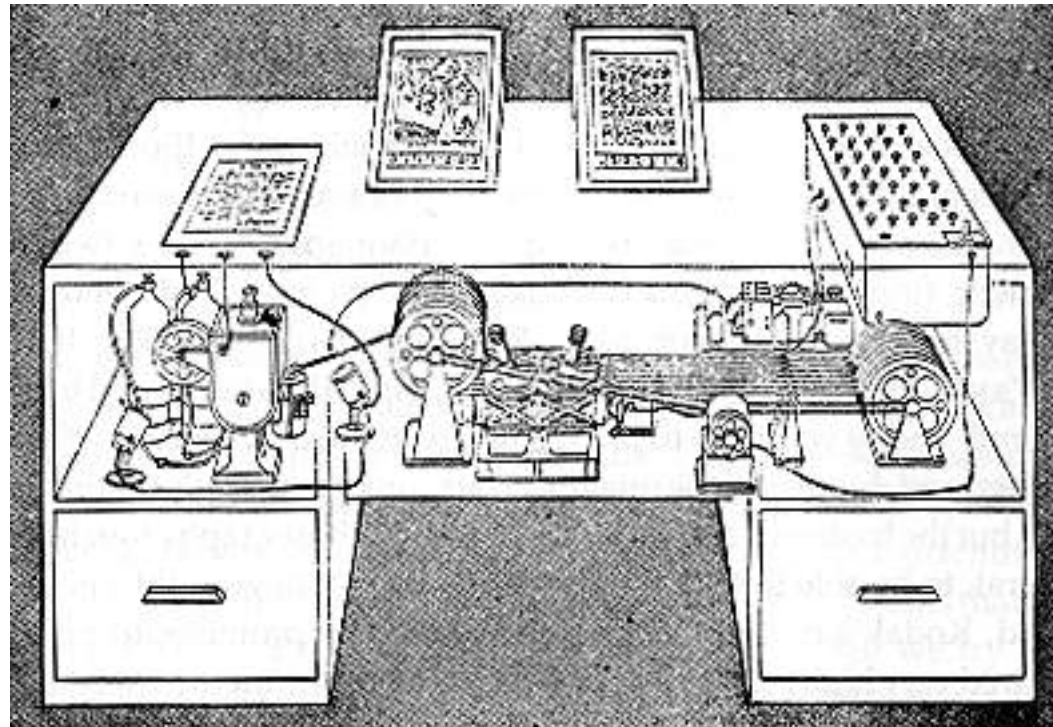


# Proofware ipertestuale

Gianluigi Rossini

Tesi di laurea triennale



Un progetto del [memex](#) di Vannevar Bush

( ca. 1945 )

## Definizione degli obiettivi

Il sistema che proponiamo deve integrare proof assistant e ipertestualità, allo scopo di creare **una banca dati di conoscenza matematica formalizzata**, verificata automaticamente ed espandibile, **sulla quale applicare strumenti di costruzione automatica di reti di link e ipertesti**.

Campi di applicazione possibili:

- Strumenti di **autoapprendimento** altamente automatizzati.
- **Ricerca scientifica** e scambio di informazioni tra studiosi.
- **Archiviazione** flessibile dei concetti.

## Software esistente

Esistono tre principali tipologie di sistemi che si occupano della gestione elettronica di conoscenza matematica formalizzata:

- **Intelligent tutor** (ActiveMath, EXCHECK).
- Sistemi di creazione di **librerie elettroniche di conoscenza** (HELM, MOWGLI, MathWeb).
- Formalismi di **presentazione** e **codifica** (MathML, OpenMath).

## L'ipertesto. Definizione minimale

Un ipertesto è un **testo non sequenziale**, che si dirama e consente al lettore di scegliere. Chiamiamo ipertesto **un insieme di brani di testo (lessie) tra cui sono definiti legami, che consentono al lettore di percorrere differenti cammini**. Un ipertesto risponde ad esigenze di:

- **Reperimento rapido delle informazioni.**
- **Indicizzazione associativa** delle informazioni, come metodo di archiviazione più flessibile e più affine al modo di ragionare della mente umana.
- **Avvicinamento delle esperienze di lettura e scrittura.**

## Requisiti di base del sistema proposto

1. **Separazione** del contenuto matematico dalle funzionalità del sistema. Necessitiamo di meccanismi di **conversione** di codice proofware **in unità informative matematiche**.
2. Sfruttamento della **teoria dell'ipertestualità**. In particolare, vogliamo creare **reti di link** tra le **unità informative** e **ipertesti strutturati** ed eventualmente complessi, in maniera automatica.
3. Resa **pienamente ipertestuale in rete**.
4. **Integrazione** con uno o più sistemi di deduzione automatica.

## Scelte concettuali

- Ammettere informazione proveniente da **più di un assistente automatico?**
- **Quali tipologie** di assistenti considerare?
- Approccio **“normativo”** o **“neutrale”**?

Scegliamo: **un solo assistente, un solo formalismo, un approccio fondazionale.**

Tutta l'informazione memorizzata sarà **immersa nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZFC).**

## Un proof checker

Il sistema che scegliamo è **un proof checker basato su ZFC**, ancora in fase di implementazione da parte di Jacob T. Schwartz, New York Univ. Esso risulta **particolarmente adatto ai nostri scopi poiché**:

- Segue l'**approccio fondazionale** che abbiamo favorito.
- È in grado di **comprendere una sintassi molto vicina a quella che viene normalmente usata nelle dimostrazioni fatte con carta e penna.**
- Prevede **meccanismi di “proof engineering”** per il **“proof-hiding”** e il **riuso.**

## Case-study: Teorema di fattorizzazione unica

Definizioni preliminari:

$$X \odot Y \quad =_{\text{Def}} \quad \{X \text{ less } Y, X \text{ with } Y\}$$

$$\langle X, Y \rangle \quad =_{\text{Def}} \quad X \odot Y \odot X$$

$$\text{is\_Map}(R) \quad =_{\text{Def}} \quad \forall p \in R \exists x \exists y p = \langle x, y \rangle$$

$$\text{is\_Func}(F) \quad =_{\text{Def}} \quad \text{is\_Map}(F) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in F \rightarrow y = z)$$

$$\text{next}(X) \quad =_{\text{Def}} \quad X \text{ with } X$$

$$\mathbb{N} \quad =_{\text{Def}} \quad \dots \text{minimo soprainsieme di } \{\emptyset\} \\ \text{chiuso rispetto alla next} \dots$$

$$X \vdash_{\mathbb{N}} Y \quad =_{\text{Def}} \quad X \cup \cup \{\text{next}(X \vdash_{\mathbb{N}} v) : v \in Y\}$$

$$X *_{\mathbb{N}} Y \quad =_{\text{Def}} \quad \cup \{X *_{\mathbb{N}} v \vdash_{\mathbb{N}} X : v \in Y\}$$

$$\text{coRem}(X, Y) \quad =_{\text{Def}} \quad \cup \left( \text{next}(X) \cap \left\{ \text{coRem}(v, Y) \vdash_{\mathbb{N}} Y : v \in X \right\} \right)$$

$$\text{Divides}(Y, X) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad \text{coRem}(X, Y) = X$$

$$\text{Prime}(P) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad \{\emptyset\} \in P \ \& \ \forall v \in P \setminus \{\{\emptyset\}\} \neg \text{Divides}(v, P)$$

$$\text{factors}(X) \quad =_{\text{Def}} \quad \{p \in X \mid \text{Prime}(p) \ \& \ \text{Divides}(p, X)\}$$



## Teorema di fattorizzazione unica – II

$$\text{maxPow}(P, X) \stackrel{\text{Def}}{=} \{\emptyset\} \cup \bigcup \left\{ y \in \text{next}(X) \mid \text{Divides}(y, X) \ \& \ \text{factors}(y) = \{P\} \right\}$$

APPLY( $\Pi_{\mathbb{N}}$ ) sigma\_add( $\mathbb{N}, *_{\mathbb{N}}, \{\emptyset\}$ )  $\implies \dots$

$$\text{Factorization}(X, F) \stackrel{\text{Def}}{\iff} \text{is\_Map}(F) \ \& \ \Pi_{\mathbb{N}}(F) = X \ \& \ \forall p \ \forall q \left( \langle p, q \rangle \in F \ \& \ \text{maxPow}(p, q) = q \rightarrow \text{Prime}(p) \right)$$

Con queste definizioni il teorema può essere così formulato:

$$X \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \left( \text{Factorization}(X, F) \ \& \ \text{is\_Func}(F) \iff F = \{ \langle p, \text{maxPow}(p, X) : p \in \text{factors}(X) \} \right).$$

## Definizione dei naturali

**THEORY** indClosure( $s, r, a$ )

$$a \subseteq s$$

$$X \in s \ \& \ r(X, Y) \rightarrow Y \in s \setminus a$$

$$U, V \in s \ \& \ r(U, Y) \ \& \ r(V, Y) \rightarrow U = V$$

$\implies$  (n)

$$a \subseteq n \ \& \ n \subseteq s$$

$$X \in n \ \& \ r(X, Y) \rightarrow Y \in n \setminus a$$

$$U, V \in n \ \& \ r(U, Y) \ \& \ r(V, Y) \rightarrow U = V$$

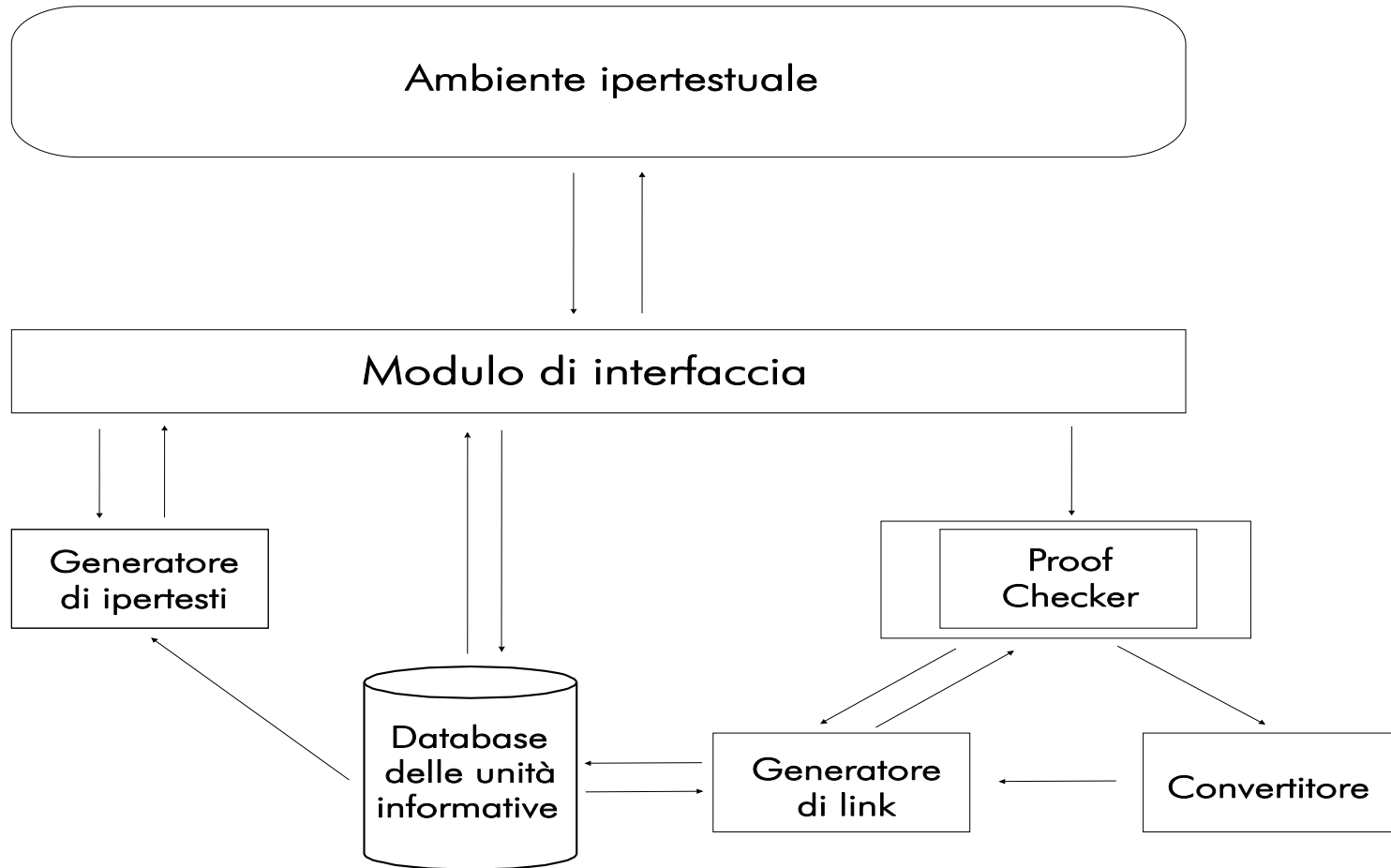
$$a \subseteq T \ \& \ \forall x \in T \ \forall y (r(x, y) \rightarrow y \in T) \rightarrow n \subseteq T$$

**END** indClosure.

n si ottiene intersecando tutti gli insiemi contenuti in s e contenenti a che sono chiusi rispetto ad r.

APPLY( $\mathbb{N}$ ) indClosure(enclos, next,  $\{\emptyset\}$ )  $\implies$  ...

# Architettura del sistema



## Frammentazione e codifica dei dati

I copioni proofware saranno frammentati in cinque tipologie di **unità informative**: **assiomi, definizioni, teoremi, dimostrazioni, teorie**.

Ci orientiamo verso **una codifica XML**:

- **Esiste già uno standard**: **OpenMath**. Adottandolo faciliteremmo l'**interoperabilità** e il **riuso**.
- Il formato **human-readable** di XML sembra **particolarmente adatto per garantire indipendenza e persistenza dei dati**, che potranno essere validi ed utilizzabili anche **al di là del ciclo di vita del sistema**.

# Schema di codifica di una dimostrazione

```
<proof name='id_proof2'>
  <statements>
    <hypotesis>
      <OMOBJ> ...</OMOBJ>
    </hypotesis>
    <thesis>
      <OMOBJ> ...</OMOBJ>
    </thesis>
  </statements>
  <proof_body>
    <step type='by_contradiction' number='... '>
      <suppose>
        <OMOBJ> ...</OMOBJ>
      </suppose>
      <step type='elementary' number='...' uses_local='... '>
        <OMOBJ> ...</OMOBJ>
      </step>
    <conclusion contradiction_in='... '>
      <OMOBJ> ...</OMOBJ>
    </conclusion>
  </step>
</proof_body>
</proof>
```

# Linking automatico

È necessario definire i **tipi di relazione** che possono intercorrere tra i concetti memorizzati nel sistema.

Cercando di seguire il più possibile terminologie già note nel campo dell'ipertestualità, consideriamo **tre principali classi** di link:

- Link **strutturali**
- Link di **pattern matching**
- Link di **relazione**

# Conclusioni

Lavoro svolto, in sintesi:

- ✓ Ricognizione sullo [stato dell'arte](#) nell'ambito del [riuso del proofware](#)
- ✓ Uno studio della moderna [teoria dell'ipertestualità](#)
- ✓ L'acquisizione di uno [scenario proofware](#) di media grandezza
- ✓ Una proposta volta al [supporto dello studio della matematica](#),  
che fonda [deduzione automatica](#) e [teoria dell'ipertestualità](#)

## Prospettive per l'immediato futuro:

- Completa specifica dell'insieme di tag che estende OpenMath, e creazione del relativo DTD
- Conversione in XML di scenari proofware di vasta scala
- Creazione di un pretty-print per la resa grafica degli scenari